

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2018/19

Blatt 9: Abgabetermin: Mittwoch, der 12.12.2018, 10:00

Aufgabe 1: Wegintegrale I

(7 Punkte)

Betrachten Sie das zweidimensionale periodische Potential

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y)$$

und das zugehörige Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$.

a) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\vec{a}, C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pi \end{pmatrix} \quad ,$$

durch explizite Auswertung des Integrals entlang des Wegs $C = C_1 + C_2$ mit $C_1: y = 0, 0 \leq x \leq 2\pi; C_2: x = 2\pi, 0 \leq y \leq \pi$. (5 Punkte)

b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a) mit der Differenz der Stammfunktion (dem Potential) an den Punkten \vec{a} und \vec{b} . (2 Punkte)

Aufgabe 2: Wegintegrale II

(7 Punkte)

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ z - xy \\ z \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die von der Kraft \vec{F} entlang der Wege C_i ($i = 1, 2$) geleistete Arbeit W_i mit

$$W_i = \int_{\vec{a}, C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0, 0, 0) \quad , \quad \vec{b} = (1, 1, 1) .$$

Dabei sind die Wege C_i gegeben durch:

$$C_1 \quad : \quad \vec{r}(t) = (t, t, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \quad (3 \text{ Punkte})$$

$$C_2 \quad : \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \quad (4 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 3: Wegintegrale III

(7 Punkte)

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie für dieses Kraftfeld die Arbeit W entlang der beiden geschlossenen Wege C_1 (3 Punkte) und C_2 (4 Punkte). Hinweis: Beachten Sie die in der Abbildung angegebene Umlaufrichtung der beiden Wege.

