Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 10: Abgabetermin: Montag, der 25.01.2021, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Differentialgleichungen – Lösung durch Einsetzen

(6 Punkte)

Gegeben sind die folgenden drei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 0 \ , \\ \mathrm{II}: &\quad 4f''(x) + 2f'(x) - 2f(x) = 0 \ , \\ \mathrm{III}: &\quad f'(x) - 2xf(x) = 0 \ . \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen einer oder mehrerer dieser Differentialgleichungen?

$$f(x) = e^{(x^2)} \ , \ f(x) = ae^{(\frac{x}{2})} + be^{(-x)} \ (a, b \in \mathbb{R}) \ , \ f(x) = e^{(x^2+x)} \ .$$

Aufgabe 2: Klassifizierung von Differentialgleichungen

(4 Punkte)

Gegeben sind folgende Differentialgleichungen:

$$\mathrm{I}: \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + t\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2 = 0 \quad , \qquad \mathrm{II}: \quad \frac{\partial f}{\partial t} + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{III}: \quad \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + t^4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x(t) = 0 \quad , \qquad \mathrm{IV}: \quad (f(x))^4 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}x = 0 \quad .$$

Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- gewöhnlich/partiell,
- linear/nicht-linear,
- homogen/nicht homogen,
- konstante/nicht-konstante Koeffizienten.

Von welcher Ordnung sind die Differentialgleichungen jeweils?

Aufgabe 3: Differentialgleichungen – Linearkombinationen

(5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\mathrm{I}: \quad f(x) + f''(x) = 0 \ ,$$

$$\mathrm{II}: \quad f(x) + f''(x) = 1 \ ,$$

$$\mathrm{III}: \quad (f(x))^2 + f''(x) = 0 \ .$$

Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ jeweils Lösungen dieser Differentialgleichungen sind ($g(x)$ und $h(x)$ sollen nicht bestimmt werden). Im folgenden werden Linearkombinationen der Form

$$f(x) = ag(x) + bh(x) \ , \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass diese Linearkombination für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung I ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie (ebenfalls durch Einsetzen), dass diese Linearkombination im allgemeinen keine Lösung der Differentialgleichungen II und III ist. (3 Punkte)

Aufgabe 4: Differentialgleichungen – Anfangsbedingungen

(8 Punkte)

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $kx(t) = m\ddot{x}(t)$ $(k > 0)$ hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} \ , \ \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

a) Geben Sie a und b (und damit $x(t)$) in Abhängigkeit von x_0 und v_0 an. (1 Punkt)

b) Im folgenden wird $x_0 = 1$ gesetzt. Für welche Werte von v_0 gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$, 0 bzw. ∞? (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bahn $x(t)$ für $v_0 = -2\lambda, -\lambda, 0$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit von kinetischer und potentieller Energie für $x_0 = 1$ und beliebige v_0. Zeigen Sie für diesen Fall, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ eine Erhaltungsgröße ist. (3 Punkte)