Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 11: Abgabetermin: Montag, der 01.02.2021, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei folgende Differentialgleichung:

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = 0 \ . \tag{1}$$

a) Geben Sie einen geeigneten Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung an. Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung?

b) Lösen Sie diese algebraische Gleichung und konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$?

Die Differentialgleichung wird nun um einen Term erweitert:

$$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x(t) = ae^{\omega t} \ . \tag{2}$$

d) Zeigen Sie, dass die spezielle Lösung

$$x_{\mathrm{s}}(t) = \frac{a}{4\omega^2 + 2\omega - 2}e^{\omega t}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2) ist.

e) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) ergibt sich aus der Summe der speziellen Lösung $x_{\mathrm{s}}(t)$ und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (1). Zeigen Sie, dass diese Summe, also

$$x(t) = x_{\mathrm{s}}(t) + a_1e^{t/2} + a_2e^{-t} \ ,$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist.

Aufgabe 2: Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung in der allgemeinen Form:

$$y'(x) + \frac{p(x)}{q(y)} = 0 \; .$$

a) Leiten Sie mit Hilfe der Separation der Variablen die folgende (implizite) Form für die Lösung $y(x)$ her:

$$Q(y) = -P(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \; . \tag{3}$$

Dabei ist $Q(y)$ eine Stammfunktion zu $q(y)$ und $P(x)$ eine Stammfunktion zu $p(x)$.

b) Betrachten Sie jetzt die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x^2}{y(x)} = 0 \; .$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (3) aus Teilaufgabe a) die Lösungen $y(x)$.

Aufgabe 3: eindimensionale Bewegung

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \sin^2(x) & : \quad |x| \leq \pi/2 \; , \\ 1 & : \quad |x| > \pi/2 \; . \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$.

b) Für welche x-Werte liegt eine Ruhelage vor?

c) Für welche Werte der Gesamtenergie E liegt eine gebundene bzw. ungebundene Bewegung vor?

d) Skizzieren Sie die Bahnen $x(t)$ für folgende Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} 1: \quad & x(t=0) = -2 \; , v(t=0) = 1 \; , \\ 2: \quad & x(t=0) = -1 \; , v(t=0) = 0 \; . \end{aligned}$$