Übungsaufgaben zur Vorlesung

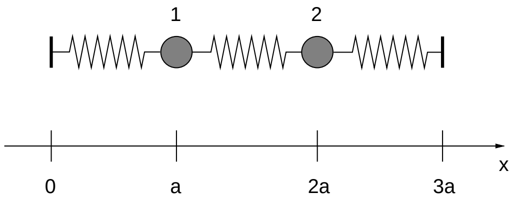
Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 12: Abgabetermin: Montag, der 08.02.2021, 16:00 Uhr

Aufgabe 1: zwei gekoppelte Oszillatoren



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte eindimensionale System aus 2 Körpern (jeweils mit Masse m), die über Federn (jeweils mit Federkonstante k) untereinander und mit den Aufhängepunkten bei $x = 0$ und $x = 3a$ verbunden sind. Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ ($n = 1, 2$) und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $\xi_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1(t) &= -2k\xi_1(t) + k\xi_2(t) \ , \\ m\ddot{\xi}_2(t) &= k\xi_1(t) - 2k\xi_2(t) \ . \end{aligned}$$

Dieses System zweier gekoppelter Differentialgleichungen hat die folgende allgemeine Lösung ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass diese Auslenkungen die gekoppelten Differentialgleichungen lösen.

c) Berechnen Sie die Bahnen der beiden Körper, also $x_1(t)$ und $x_2(t)$, für die Anfangsbedingungen

$$x_1(t=0) = \frac{3}{2}a \ \ , \ \ x_2(t=0) = 2a \ \ , \ \ \dot{x}_1(t=0) = 0 \ \ , \ \ \dot{x}_2(t=0) = 0 \ .$$

Aufgabe 2: Taylorentwicklung

Bestimmen Sie die Taylorreihe folgender Funktionen (jeweils um den Punkt $x = 0$):

a) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$,

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$,

c) $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Aufgabe 3: Taylorreihe für $\cos(x)$

Zeigen Sie, dass die Taylorreihe $f_{\mathrm{T}}(x)$ für die Kosinus-Funktion $f(x) = \cos(x)$ gegeben ist durch

$$f_{\mathrm{T}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} .$$

Aufgabe 4: Taylorreihe für $\exp(-x^2)$

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^4 (explizit durch Berechnung der Ableitungen $f^{(n)}(x = 0)$).

b) Die Taylorreihe von $\exp(-x^2)$ lässt sich auch über die bekannte Taylorreihe der Funktion $g(y) = \exp(y)$ bestimmen: $f_{\mathrm{T}}(x) = g_{\mathrm{T}}(-x^2)$. Was ergibt sich damit für die vollständige Taylorreihe?

Aufgabe 5: Wiederholung - partielle Integration

In Aufgabe 1a) von Blatt 6 wurden Integrale der Form

$$\int x^m \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

für $m \neq -1$ betrachtet. Für $m = -1$ ergibt sich das Integral $\int \frac{1}{x} \ln(x)$.

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe partieller Integration.

b) Das Integral aus Teilaufgabe a) ist ein Spezialfall des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f'(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$I = \frac{1}{2}[(f(x))^2]_a^b .$$