

## Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

**Blatt 2:** Abgabetermin: Montag, der 16.11.2020, 16:00

### Aufgabe 1: Kinematik von Massenpunkten

(8 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Bahnkurven für die Bewegung eines Massenpunkts in Dimension  $d = 2$ :

$$\vec{r}_1(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(2\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \sin(\omega t) \\ t \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \omega > 0.$$

- Skizzieren Sie jeweils die Komponenten  $x_i(t)$  und  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) sowie die Bahnen  $\vec{r}_i(t)$  in der zweidimensionalen Ebene. Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Bahnen für  $t > 0$ . Das Verhalten für  $t < 0$  ergibt sich dann aufgrund der Symmetrie der Bahnkurven ( $\vec{r}_i(-t) = \dots$ ). (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_i(t)$  und die Beschleunigungen  $\vec{a}_i(t)$  sowie deren Beträge  $v_i(t) = |\vec{v}_i(t)|$  und  $a_i(t) = |\vec{a}_i(t)|$ . (2 Punkte)

Betrachten Sie jetzt die folgende Bahn in Dimension  $d = 3$ :

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \omega > 0, \alpha > 0.$$

- Skizzieren Sie diese dreidimensionale Bewegung. (2 Punkte)

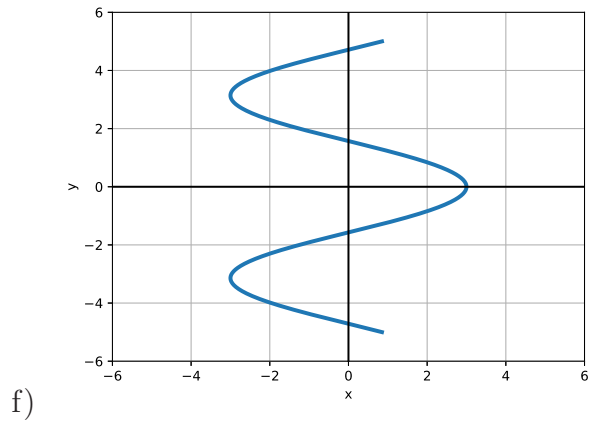
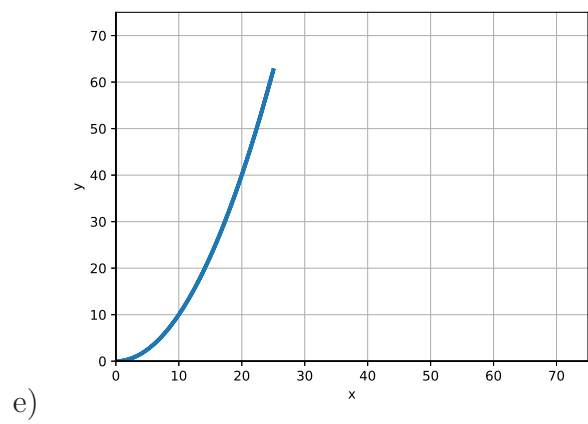
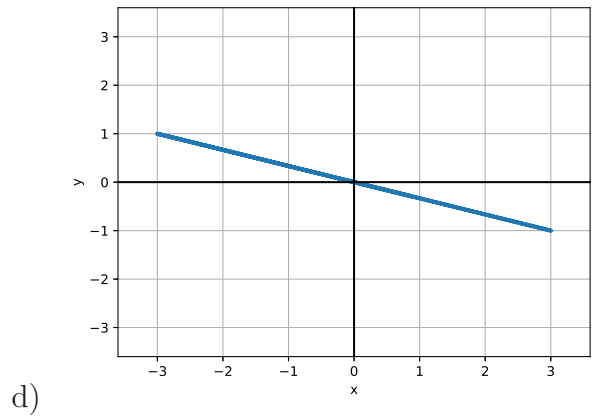
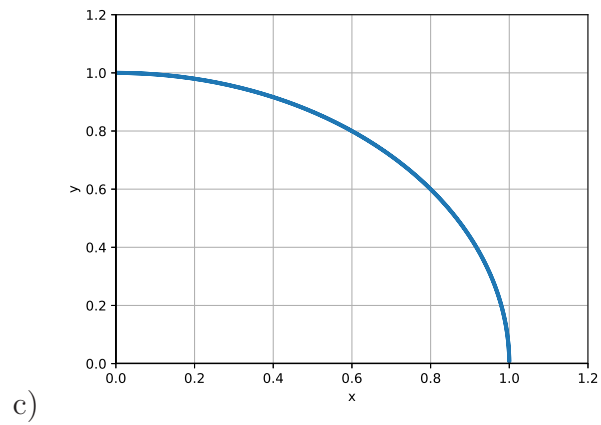
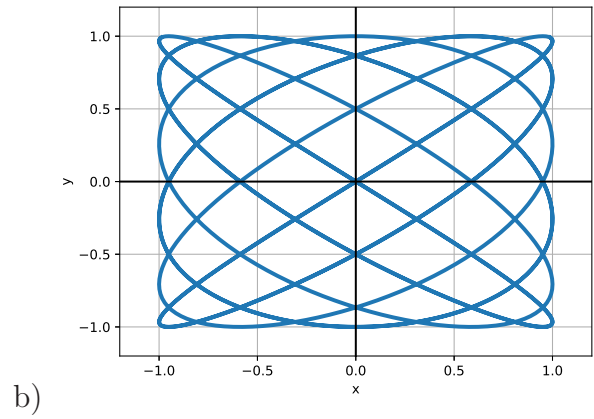
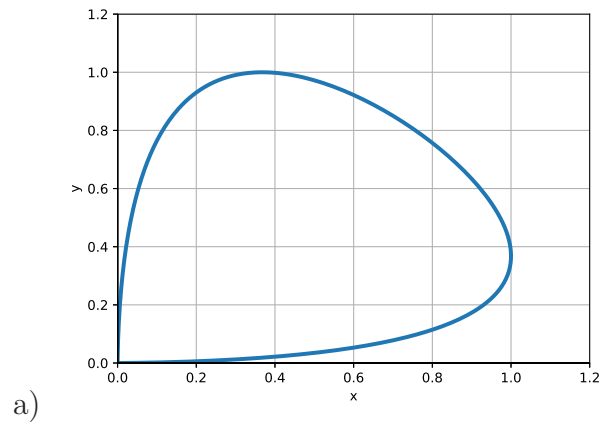
### Aufgabe 2: zweidimensionale Bahnen

(6 Punkte)

Gegeben sind die zweidimensionalen Bahnen in der Darstellung als vektorwertige Funktionen  $\vec{r}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, & \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} \exp(-t^2) \\ \exp(-(t-1)^2) \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_3(t) &= \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, & \vec{r}_4(t) &= \begin{pmatrix} t^2 \\ 0.1t^4 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_5(t) &= \begin{pmatrix} \sin(6t) \\ \cos(5t) \end{pmatrix}, & \vec{r}_6(t) &= \begin{pmatrix} \exp(-t^2) \\ \sqrt{1 - \exp(-2t^2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Bahnen werden durch die  $\vec{r}_i(t)$  beschrieben? (Die Bahnen sind jeweils dargestellt für  $-5 \leq t \leq 5$ ).



### Aufgabe 3: Vektoren I

(7 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2,$$

mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

- $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ . (1 Punkt)
- $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ . (1 Punkt)
- $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ . (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  paarweise senkrecht aufeinander stehen. (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  erfüllen. (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die Dreiecksungleichung  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  erfüllen. (1 Punkt)
- Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^3 [(\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{e}_i]$$

(1 Punkt)

### Aufgabe 4: Vektoren II

(2 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

- $2\alpha\vec{u} + \frac{1}{4\alpha}(2\vec{v} - 8\alpha^2\vec{u})$  (1 Punkt)
- $(\alpha + \beta)^2(\vec{u} + \vec{v}) + (\alpha - \beta)^2(\vec{u} - \vec{v}) + (\alpha^2 + \beta^2)(\vec{v} - \vec{u})$  (1 Punkt)

Dabei sind  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  beliebige Vektoren und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .