Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 3: Abgabetermin: Montag, der 23.11.2020, 16:00

Aufgabe 1: Skalarprodukt

(6 Punkte)

Für die (beliebigen) Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sind die folgenden Skalarprodukte gegeben:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1\ ,\ \vec{v}\cdot\vec{v} = 1\ ,\ \vec{w}\cdot\vec{w} = 4\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{w} = 0\ ,\ \vec{v}\cdot\vec{w} = \frac{3}{4}\ ,$$

Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}\ ,\ \vec{b} = 2\vec{v} - \vec{w}\ ,\ \vec{c} = -\vec{u} + 3\vec{v}\ ,$$

die Beträge $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|\vec{c}|$, sowie die Skalarprodukte $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ und $\vec{b}\cdot\vec{c}$.
Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist es nicht notwendig, konkrete Beispiele für die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ anzugeben. Die Ergebnisse für die Beträge und Skalarprodukte sind unabhängig von der Wahl der $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Aufgabe 2: Vektorprodukt I

(7 Punkte)

a) Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\ .$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\ . \tag{1}$$

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, ausgehend von Gl. (1) und $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ die folgende Gleichung:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\ .$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3: Vektorprodukt II

(3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

a) Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass für das Vektorprodukt das Assoziativgesetz i.A. nicht gilt, also

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \ .$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Flächeninhalte der von den Vektorpaaren $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ und $\{\vec{b}, \vec{c}\}$ aufgespannten Parallelogramme. (1 Punkt)

Aufgabe 4: Kronecker-Delta

(3 Punkte)

Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \ i = j \ , \\ 0 & : \ i \neq j \ . \end{cases}$$

Berechnen Sie die folgenden Summen

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \delta_{i3} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_i c_j \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} (\delta_{ii} + \delta_{ij}) \ .$$

Hinweis: Berechnen Sie die dritte Summe für $j \in \{1, 2, 3\}$.