Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 6: Abgabetermin: Montag, der 14.12.2020, 16:00

Aufgabe 1: Integration

(6 Punkte)

a) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe partieller Integration ($m \neq -1$):

$$\int_1^a x^m \ln(x) \, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe der Substitution $x = a\sin(\alpha)$ (α ist die Substitutionsvariable; es gilt $a > 0$):

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

c) Das folgende Integral ergibt eine Funktion, die von dem Parameter x abhängt ($x \neq 0$). Berechnen Sie $f(x)$ mit Hilfe partieller Integration.

$$f(x) = \int_0^x t \sin(xt) \, \mathrm{d}t \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 2: Integration durch Substitution

(6 Punkte)

a) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Substitution $u = \ln(x)$:

$$\int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln(x))} \, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Substitution $u = \cos(x)$ und anschließender Substitution $v = u^2$:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos^2(x)) \cos(x) \sin(x) \, \mathrm{d}x \ . \quad \text{(4 Punkte)}$$

Hinweis: $F(v) = v\ln(v) - v$ ist Stammfunktion zu $f(v) = \ln(v)$.

Aufgabe 3: skalare Felder

(4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$ $(i = 1, 2)$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy \ , \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2+1} \ .$$

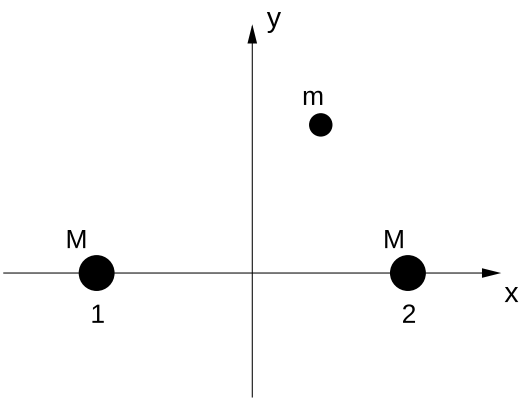
Skizzieren Sie die Höhenlinien der skalaren Felder $\varphi_i(\vec{r})$, also die Linien mit $\varphi(\vec{r}) = \varphi_n$, für eine sinnvolle Auswahl an φ_n.

Aufgabe 4: Vektorfelder

(6 Punkte)

Wie in der Abbildung dargestellt, befinden sich zwei Körper (Masse jeweils M) fest an den Orten

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad (a > 0) \ .$$



a) Wie lautet das Kraftfeld (Gravitationsfeld) $\vec{F}(\vec{r})$, das diese beiden Körper auf einen dritten Körper (Masse m) am Ort $\vec{r}$ ausüben? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie $\vec{F}(\vec{r})$ für $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

d) Skizzieren Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$. (2 Punkte)