

**Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)**

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

**Blatt 7:** Abgabetermin: Montag, der 21.12.2020, 16:00

**Aufgabe 1: partielle Ableitungen**

(3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion:

$$g(x, y, z) = x^2 \sin(xz) + ze^y .$$

Zeigen Sie explizit, dass die gemischten zweiten Ableitungen unabhängig von der Reihenfolge sind, in der die Ableitungen durchgeführt werden, also:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} .$$

**Aufgabe 2: Gradientenfelder**

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder der folgenden skalaren Felder ( $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ):

a)

$$\varphi_1(\vec{r}) = xy . \quad (1 \text{ Punkt})$$

b)

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{y}{x^2 + 1} . \quad (1 \text{ Punkt})$$

c)

$$\varphi_3(\vec{r}) = \cos(x) \cos(y) \cos(z) . \quad (1 \text{ Punkt})$$

d)

$$\varphi_4(\vec{r}) = r^n , \quad \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} . \quad (2 \text{ Punkte})$$

### Aufgabe 3: Potential des Schwerfelds

(2 Punkte)

Für das Schwerfeld der Erde gilt näherungsweise die folgende Form für das Kraftfeld:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g}, \text{ mit } \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Wie lautet das entsprechende Potential?

### Aufgabe 4: Kraftfeld und Potential

(6 Punkte)

Gegeben sei das Potential  $V(\vec{r})$  mit  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ :

$$V(\vec{r}) = \cos(x) + \cos(y).$$

- Bestimmen Sie das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ . (1 Punkt)
- Für welche  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  ist das Potential maximal bzw. minimal? (2 Punkte)
- Für welche  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ ? (1 Punkt)
- Zeigen Sie, dass die Geraden  $y = (2n + 1)\pi \pm x$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) Höhenlinien des Potentials mit  $V(\vec{r}) = 0$  sind. (2 Punkte)

### Aufgabe 5: Produktregel für vektorwertige Funktionen

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Ableitung des Skalarprodukts bzw. des Vektorprodukts zweier vektorwertiger Funktionen  $\vec{a}(t)$  und  $\vec{b}(t)$  (mit den Komponenten  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $i = x, y, z$ ) die folgenden Produktregeln gelten:

a)

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{a}(t) \times \vec{b}(t) \right) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t). \quad (3 \text{ Punkte})$$

b)

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) \right) = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t). \quad (2 \text{ Punkte})$$