Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2020/21

Blatt 8: Abgabetermin: Montag, der 11.01.2021, 16:00

Aufgabe 1: N-Teilchen-System – innere Kräfte

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein N-Teilchen-System mit inneren Kräften $\vec{F}_{ij}$ zwischen Teilchen i und j gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} = \vec{0} \ .$$

Aufgabe 2: Drehimpulserhaltung

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Teilchens auf der Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für eine beschleunigte Bewegung der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} t^2 \vec{g}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ im Allgemeinen *keine* Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Drehimpuls

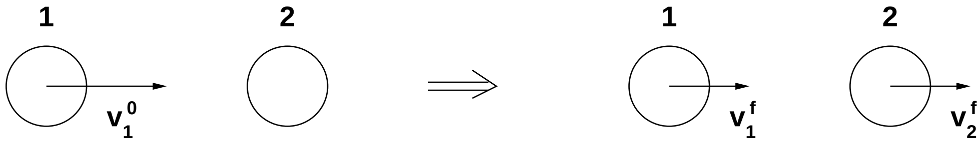
(3 Punkte)

Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in der Zeit t die Fläche $A(t)$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Fläche nach der Zeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \ .$$

Aufgabe 4: elastischer Stoß

(9 Punkte)

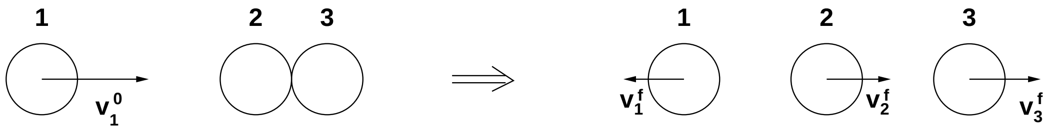


Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Stoßprozess: Teilchen 1 (Masse m_1, Geschwindigkeit v_1^0) trifft auf das ruhende Teilchen 2 (Masse m_2, Geschwindigkeit $v_2^0 = 0$); nach dem Stoß haben die beiden Teilchen die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}.

a) Berechnen Sie (unter der Annahme, dass Gesamtimpuls und Gesamtenergie des Systems erhalten sind) die Geschwindigkeiten v_1^{f} und v_2^{f}. (5 Punkte)

b) Was ergibt sich für den Fall $m_1 = m_2$? (1 Punkt)

Betrachten Sie jetzt den in der zweiten Abbildung dargestellten Stoßprozess mit drei Teilchen (Massen $m_i = m$, $v_2^0 = v_3^0 = 0$):



c) Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Endzustände mit den Erhaltungssätzen verträglich sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad v_1^{\mathrm{f}} = v_2^{\mathrm{f}} = 0 \ , \ v_3^{\mathrm{f}} = v_1^0 \ , \\ \mathrm{II}: &\quad v_1^{\mathrm{f}} = -\frac{1}{3} v_1^0 \ , \ v_2^{\mathrm{f}} = v_3^{\mathrm{f}} = \frac{2}{3} v_1^0 \ . \quad \text{(3 Punkte)} \end{aligned}$$