

**Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)**

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

**Blatt 12:** Abgabetermin: Mittwoch, der 27.01.2016, 10:00

**Aufgabe 1: gedämpfte Schwingung**

(7 Punkte)

Gegeben sei die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse  $m$  an einer Feder (Federkonstante  $k$ ) mit zusätzlicher Reibungskraft  $F_R(\dot{x}) = -\bar{\gamma}\dot{x}$ :

$$kx(t) + \bar{\gamma}\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t) = 0 .$$

- a) Zeigen Sie, dass im aperiodischen Grenzfall  $\gamma = \omega$  (mit  $\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{2m}$ ,  $\omega = \sqrt{k/m}$ ) die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = (a_1 + a_2t)e^{-\gamma t} , \quad a_i \in \mathbb{R} . \quad (2 \text{ Punkte})$$

- b) Welche Lösungen ( $x_1(t)$  oder  $x_2(t)$ , siehe Vorlesungsskript) dominieren in den Fällen  $\gamma = \omega$  und  $\gamma > \omega$  für große Zeiten  $t$ ? (2 Punkte)

Im Folgenden wird  $k = 1$  und  $m = 1$  gesetzt. Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$ .

- c) Wie lauten die Lösungen  $x(t)$  für diese Anfangsbedingungen jeweils für  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 1$  und  $\gamma = 2$ . (3 Punkte)

**Aufgabe 2: komplexe Zahlen – Multiplikation**

(6 Punkte)

Die komplexen Zahlen  $z_1, z_2, z_3$  sind gegeben durch

$$z_1 = 1 + i , \quad z_2 = -2 + 2i , \quad z_3 = -i .$$

- a) Berechnen Sie die komplexen Zahlen  $p_j = iz_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) ... (1 Punkt)
- b) ... und  $q_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) (2 Punkte).
- c) Zeichnen Sie die  $z_j, p_j$  und  $q_j$  in der komplexen Ebene. Welche anschauliche Bedeutung ergibt sich daraus für die Multiplikation der  $z_j$  mit  $i$  bzw.  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ ? (3 Punkte)

### Aufgabe 3: komplexe Zahlen – Division

(3 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)

$$\frac{1}{1-i},$$

b)

$$\frac{1+i}{(2-i)^2},$$

c)

$$\frac{i-2}{2+e^{i\pi/4}}.$$

### Aufgabe 4: komplexe Zahlen – $e^{i\varphi}$

(6 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

a)  $2e^{-i\pi/4}$  ,   b)  $ie^{\pi i}$  ,   c)  $e^{n\pi i}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) .

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $z = re^{i\varphi}$ :

d)  $2-2i$  ,   e)  $(-1)^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) ,   f)  $(1+i)^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) .