Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden für das Lehramt (Ba of Arts)

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2015/16

Blatt 5: Abgabetermin: Mittwoch, der 25.11.2015, 10:00

Aufgabe 1: Integration I

(8 Punkte)

a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^{\ln 2} \sinh(x)\ \mathrm{d}x \quad , \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^3}\ \mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^{(\ln a)^{-1}} a^x\ \mathrm{d}x\ . \quad \text{(3 Punkte)}$$

b) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_1^a x^m \ln(x)\ \mathrm{d}x\ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

c) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe der Substitution $x = a\sin(\alpha)$ (α ist die Substitutionsvariable):

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ \mathrm{d}x\ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

d) Bestimmen Sie die Stammfunktion für

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} (n+1)!\ x^n\ . \quad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 2: Integration II

(4 Punkte)

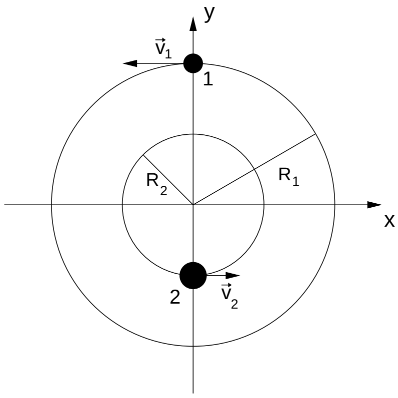
Die folgenden Integrale ergeben jeweils eine Funktion, die von dem Parameter x abhängt. Bestimmen Sie die Funktionen $f_i(x)$.

$$f_1(x) = \int_0^1 e^{-xy}\ \mathrm{d}y \quad , \quad f_2(x) = \int_{-x}^{2x} \left((x')^2 + (x')^3\right) \mathrm{d}x' \quad , \quad f_3(x) = \int_0^x t\sin(xt)\ \mathrm{d}t\ .$$

[Je einen Punkt für $f_{1/2}(x)$, zwei Punkte für $f_3(x)$.]

Aufgabe 3: Zwei-Körper-Problem

(8 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte Zwei-Körper-Problem, bei dem sich zwei Körper mit Massen m_1 und $m_2 = 2m_1$ auf Kreisbahnen mit Radien R_1 und R_2 um den Ursprung bewegen. Der Schwerpunkt des Zwei-Körper-Systems befindet sich für alle Zeiten bei $\vec{r} = \vec{0}$. Der Betrag der Geschwindigkeiten ist für die beiden Körper jeweils konstant, $|\vec{v}_i(t)| = v_i$.

a) Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Verhältnisse R_1/R_2 und v_1/v_2. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ der beiden Körper an. Hinweis: Die Abbildung zeigt die Positionen zur Zeit $t = 0$. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie für die in der Abbildung dargestellte Geometrie die Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$ aufgrund der Gravitationskraft, die die beiden Körper aufeinander ausüben. (2 Punkte)

d) Wie groß müssen die Geschwindigkeiten v_i sein, damit die beiden Körper auf ihren Kreisbahnen bleiben. Stimmt das resultierende Verhältnis v_1/v_2 mit dem aus Teilaufgabe a) überein? (2 Punkte)

Aufgabe 4: Teilchen im Kraftfeld

(5 Punkte)

Der Körper 1 mit Masse $m_1 = 1$ bewegt sich auf der Bahn

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Auf den Körper wirkt die Gravitationskraft des Körpers 2 (mit Masse $m_2 = 1$), der sich fest am Ursprung befindet: $\vec{r}_2(t) = \vec{0}$.

a) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(t)$ aufgrund der Gravitationskraft, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt. (2 Punkte)

b) Zeichnen Sie die Bahn $\vec{r}_1(t)$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem, sowie die Vektoren $\vec{F}(t_n)$ für die Zeiten $t_n = 0, 1, 2, 3$ als Pfeile ausgehend von den Orten $\vec{r}_1(t_n)$. Setzen Sie dazu die Gravitationskonstante $G = 1$. (3 Punkte)