Übungsaufgaben zur Vorlesung

Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 10: Abgabetermin 10.01.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Trägheitstensor

Die kinetische Energie T_{R} eines starren Körpers bei Rotation um die Achse $\vec{\omega}$ (mit Kreisfrequenz $\omega = |\vec{\omega}|$) lässt sich darstellen als

$$T_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{3} J_{lm}\, \omega_l \omega_m \ .$$

Dabei sind die J_{lm} die Komponenten des Trägheitstensors J und die ω_l, ω_m die Komponenten des Vektors $\vec{\omega}$ (beide im Koordinatensystem K). Zeigen Sie, dass die kinetische Energie T_{R} invariant ist unter orthogonalen Transformationen, d.h. bei einem Übergang vom Koordinatensystem K zu einem Koordinatensystem K'. Verwenden Sie dazu die Transformationseigenschaften der Komponenten von J und $\vec{\omega}$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Gradient

Bestimmen die jeweils das Gradientenfeld der folgenden Felder:

a)
$$\varphi_1(\vec{r}) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) \ ,$$

b)
$$\varphi_2(\vec{r}) = r^n \ , \text{ mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N} \ . \text{ (2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: Divergenz

Das elektrische Feld einer Punktladung q am Ort $\vec{r}_0$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \ .$$

Zeigen Sie, dass die Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$ für alle $\vec{r} \neq \vec{0}$ verschwindet. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Laplace-Operator

Bestimmen Sie $\Delta\varphi$ für die skalaren Felder:

a)

$$\varphi_1(\vec{r}) = \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) \text{ mit } \vec{k} = (k_1, k_2, k_3) \ ,$$

b)

$$\varphi_2(\vec{r}) = \exp(-\alpha r^2) \ , \text{ mit } r = |\vec{r}| \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \ , \text{ (2 Punkte)}$$

Aufgabe 5: Rotation - allgemeine Rechenregeln

Beweisen Sie für allgemeine skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ die Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi \ .$$

(2 Punkte)