

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Mathematische Methoden

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

WS 2011/2012

Blatt 11: Abgabetermin 17.01.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Rotation

Für welche Werte der Konstanten a ist das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} axy - z^3 \\ (a-2)x^2 \\ (1-a)xz^2 \end{pmatrix}$$

wirbelfrei? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Berechnung von Linienintegralen

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x+y \\ z-xy \\ z \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die von der Kraft \vec{F} entlang der Wege C_i ($i = 1, 2, 3$) geleistete Arbeit ΔA_i mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a}, C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0, 0, 0) \quad , \quad \vec{b} = (1, 1, 1) .$$

Dabei sind die Wege C_i gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 & : \quad \vec{r}(t) = (t, t, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 & : \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t + 2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \quad , \quad (2 \text{ Punkte}) \\ C_3 & : \quad \vec{r}(t) = (t, t, c + d \exp(t)) \quad , \quad 0 < t < 1 \quad , \quad (3 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

Hinweis: für den Weg C_3 sind zunächst die Konstanten c und d zu bestimmen.

- b) Warum hängen die ΔA_i vom Verlauf des Weges und nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab? (1 Punkt)

Aufgabe 3: Potential eines Vektorfeldes

Gegeben sei folgendes Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie das Linienintegral von $(0, 0, 0)$ bis $(1, 1, 1)$ auf dem Weg C_1 von Aufgabe 2.
- Hängt das Linienintegral von der Form des Weges ab?
- Berechnen Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ über das Linienintegral

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' ,$$

und einer geeigneten Parametrisierung des Wegs von $\vec{0}$ nach \vec{r} . (3 Punkte)

- Berechnen Sie jetzt das Integral über das Vektorfeld als Differenz des Potentials (der Stammfunktion!) an den Integrationsgrenzen. (1 Punkt)