

I 6. Integral-Funktionen

definiere neue Funktion über die Integraldarstellung

$$F(x) = \int_a^x f(x') dx' \quad \text{oder} \quad F(x) = \int_a^b f(x,t) dt$$

Beispiel:

1. Gammafunktion $\Gamma(x+1) := \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$

für $x = n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$

Beweis: $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{\infty} = -(0-1) = 1 = 0! \checkmark$

bleibt noch zu zeigen, daß $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$

$$\stackrel{\wedge}{=} n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\Gamma(n+1) := \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \dots$$

partielle Integration

$$f_1(t) = t^n$$

$$f_2(t) = e^{-t}$$

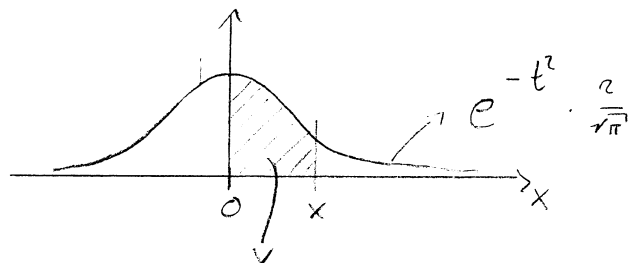
$$f_1'(t) = n \cdot t^{n-1}$$

$$f_2'(t) = -e^{-t}$$

$$\dots = \underbrace{-[t^n e^{-t}]_0^{\infty}}_{= 0} + n \underbrace{\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt}_{= \Gamma(n)} = n \cdot \Gamma(n) \quad \checkmark$$

2. Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



$$\text{Fläche} = \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad ; \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

I 7. Uneigentliche Integrale

- bisher:
- endliche Intervalle
 - beschränkte Integranden

jetzt: Integrale, bei denen die Grenzen nicht endlich oder der Integrand nicht beschränkt ist, heißen

uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

Definition:
$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx$$

heißt uneigentliches Integral, sofern der Limes existiert

analog:
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_A^B f(x) dx$$

↳ Limes werden unabhängig voneinander durchgeführt

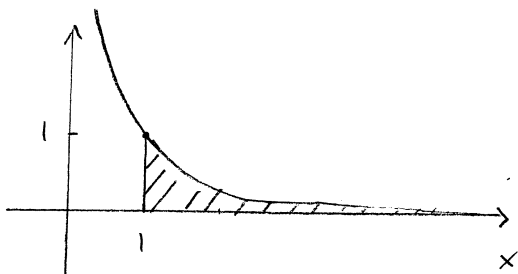
Falls $\lim_{A \rightarrow -\infty}$ und $\lim_{B \rightarrow \infty}$ nicht unabhängig voneinander existieren, dann

existiert ggf. der "Hauptwert" des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{C \rightarrow \infty} \int_{-C}^{+C} f(x) dx$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^B \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{B} + 1 \right] = 1 \end{aligned}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \left[\left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_A^B \right] = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} (B^2 - A^2)$$

↳ Grenzwert existieren nicht unabhängig voneinander

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{C \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (C^2 - C^2) \right] = 0 \quad \text{existiert}$$

Singuläre Integranden

Definition: Sei $f(x)$ an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ singular, d.h.

$$|f(x)| \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

dann ist das Integral zu bilden als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon_1} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon_2}^b f(x) dx \right)$$

→ ebenfalls „uneigentliches Integral“

auch hier wieder, falls $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0}$ & $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0}$ nicht unabhängig voneinander existieren:

Hauptwertintegral

$$\int_a^b f(x) dx = P \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

Beispiele:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

I 8. Parameterintegrale

Integrand oder Integrationsgrenze hängen von einem Parameter α ab

z.B.
$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

$$F(\alpha) = \int_a^{b(\alpha)} f(x) dx \quad (2)$$

Differentiation eines Parameterintegrals

für (1):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

Leibnizsche Regel

für (2):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^{b(\alpha)} f(x) dx = b'(\alpha) f(b(\alpha))$$

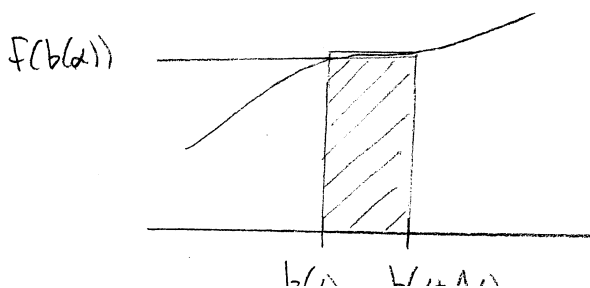
Beweis (2):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^{b(\alpha)} f(x) dx = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \left[\int_a^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x) dx - \int_a^{b(\alpha)} f(x) dx \right]$$

$$= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{b(\alpha)}^{b(\alpha+\Delta\alpha)} f(x) dx$$

$$= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} (b(\alpha+\Delta\alpha) - b(\alpha)) f(b(\alpha))$$

$$= b'(\alpha) f(b(\alpha))$$



Integration eines Parameterintegrals

gesucht: $\int_{\beta}^{\eta} F(\alpha) d\alpha$

für (1), d.h. $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ gilt

$$\int_{\beta}^{\eta} F(\alpha) d\alpha = \int_{\beta}^{\eta} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b dx \int_{\beta}^{\eta} f(x, \alpha) d\alpha$$

Beispiel: $f(x, \alpha) = \alpha^x$ $\alpha \in [0, 1]$
 $x \in [a, b]$ $a > 0$

$$F(\alpha) = \int_a^b \alpha^x dx = \int_a^b e^{x \ln \alpha} dx = \frac{1}{\ln \alpha} (\alpha^b - \alpha^a)$$

$$\int_{\beta=0}^{\eta=1} F(\alpha) d\alpha = ?$$

\rightarrow es läßt sich keine Stammfunktion zu $\frac{\alpha^b}{\ln \alpha}$ angeben!

Ausweg:

$$\int_{\beta=0}^{\eta=1} F(\alpha) d\alpha = \int_a^b dx \int_0^1 \alpha^x d\alpha$$

$$= \int_a^b dx \left[\frac{1}{x+1} \alpha^{x+1} \right]_0^1$$

$$= \int_a^b dx \left[\frac{1}{x+1} 1^{x+1} - \frac{1}{x+1} 0^{x+1} \right]$$

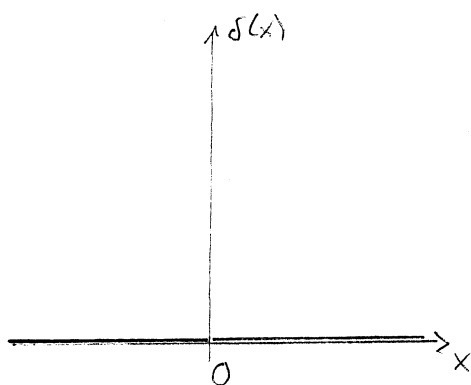
$$= \int_a^b dx \frac{1}{x+1} = \left[\ln(1+x) \right]_a^b = \ln \frac{1+b}{1+a}$$

II 9. die δ -Funktion

Versuch eine Definition:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$



→ macht (aus Sicht der Mathematik) keinen Sinn!

besser:

Definition „ δ -haltiger“ Objekte $A(x)$ immer im Zusammenhang mit Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) A(x) dx$$

$\eta(x)$: Testfunktion (im folgenden nicht genauer diskutiert)

⇒ grundlegende Definitionen

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) \delta(x) dx := \eta(0)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) \delta(x-x_0) dx := \eta(x_0)$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) \delta(-x) dx := \eta(0)$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta\left(\frac{x}{c}\right) dx = |c| \varphi(0)$$

(2) - (4) sind als Spezialfälle in

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta\left(\frac{x-x_0}{c}\right) dx = |c| \varphi(x_0) \quad \text{enthalten}$$

Grund für diese Festsetzung:

Formal die Variablensubstitution $u = \frac{x-x_0}{c}$, $x = cu + x_0$

durch Führen

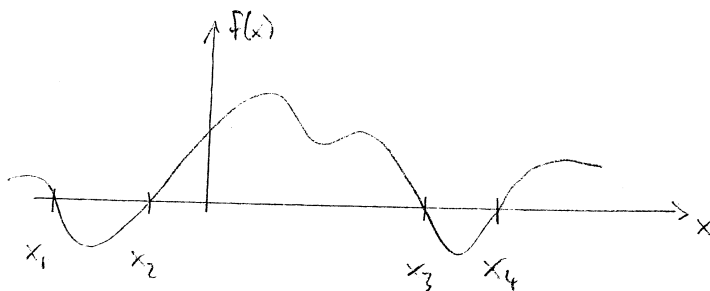
$$\Rightarrow dx = c du$$

$$\Rightarrow (\text{für } c > 0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi(cu + x_0) \delta(u) du = c \varphi(x_0)$$

$$\text{für } c < 0 \quad \sim \int_{\infty}^{-\infty} \sim - \text{Zeichen}$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(f(x)) dx = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

x_1, x_2, \dots, x_n : Nullstellen der Funktion $f(x)$



mit $f'(x_i) \neq 0$ für
 $i = 1, \dots, n$

in der Nähe von x_i : $f(x) = f'(x_i)(x-x_i)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(f(x)) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(f'(x_i)(x-x_i)) dx \\ &= \frac{\varphi(x_i)}{|f'(x_i)|} \end{aligned}$$

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta'(x) dx := -\varphi'(0)$$

formale Begründung: partielle Integration

$$F_1(x) = \varphi(x) \quad F_2(x) = \delta'(x)$$

$$F_1'(x) = \varphi'(x) \quad F_2(x) = \delta(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta'(x) dx = \underbrace{[\varphi(x) \delta(x)]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \delta(x) dx}_{=\varphi'(0)}$$

Definition: „ δ -symbolisches Gleichheitszeichen“ für „ δ -haltige“ Objekte
 $A(x)$ und $B(x)$

$$A(x) = B(x) \quad \text{wenn} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) A(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) B(x) dx$$

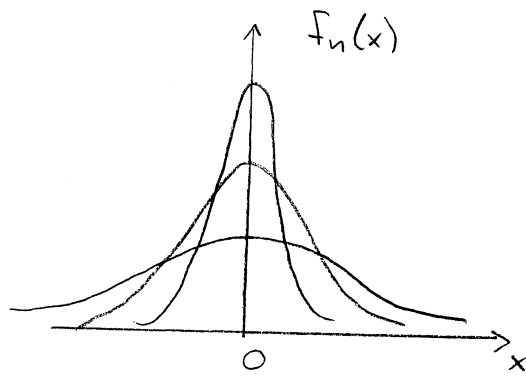
für alle Testfunktionen $\varphi(x)$

\Rightarrow (siehe oben)

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta\left(\frac{x}{c}\right) = |c| \delta(x)$
- $\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$

Darstellung durch Funktionenfolgen

Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n}} e^{-n^2 x^2}}_{= f_n(x)} = \delta(x)$



$$f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \infty$$

• Halbwertsbreite:

$$f_n\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} f_n(0) \quad ;$$

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{n}{2}\right)^2 b^2} = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \quad ; \quad -\left(\frac{n}{2}\right)^2 b^2 = \ln \frac{1}{2}$$

$$b^2 = 4 \frac{\ln 2}{n^2}$$

$$b \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für jedes $x \neq 0$

• $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 x^2} dx}_{= \frac{\sqrt{\pi}}{n}} = 1$

allgemein:

Für die Funktionenfolge $f_n(x)$ gilt

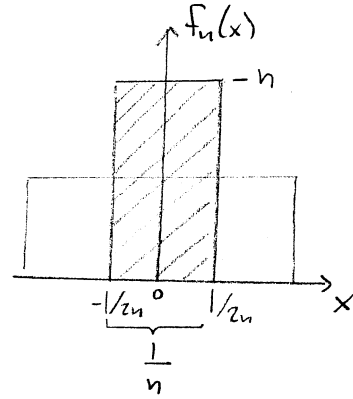
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad , \quad \text{wenn}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für jedes $x \neq 0$

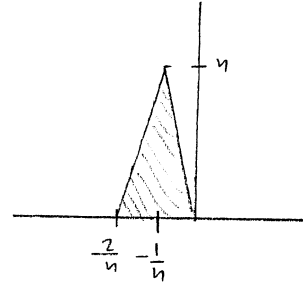
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$

weitere Beispiele

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2 x & \text{für } -\frac{1}{n} < x < 0 \\ 2n + n^2 x & \text{für } -\frac{2}{n} < x < -\frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



beachte: $f_n(0) = 0$ für alle n !

anstelle von $\lim_{n \rightarrow \infty}$ läßt sich auch der $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ betrachten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x)$$

Beweis: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2} = 0$
nur für $x \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\left(\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right) \cdot \varepsilon^2} dx =$$

Substitution: $y = \frac{x}{\varepsilon} \quad dx = dy \cdot \varepsilon$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = [\arctan y]_{-\infty}^{\infty} = \pi \quad \checkmark$$

außer dem:

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\epsilon} &= P \frac{1}{x} - \pi i \delta(x) \\ &\quad \hookrightarrow \text{wird zum Hauptwertintegral} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x+i\epsilon}} \right\} \text{Beweis später}$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dt = \delta(x)$$

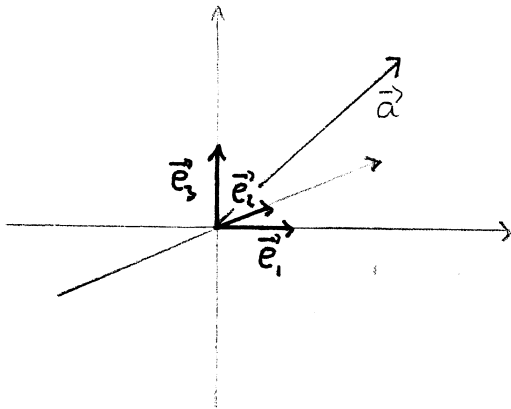
II Vektoren und Matrizen

II.1 Vektoren

Vektoren in Komponenten Darstellung

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

mit dem durch \vec{e}_1, \vec{e}_2 & \vec{e}_3 aufgespannten Bezugssystem (Koordinatensystem)



\vec{e}_1, \vec{e}_2 & \vec{e}_3 sind Einheitsvektoren (Länge 1)

Schreibweise: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ auch $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Addition zweier Vektoren

$$\text{sei } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_i = a_i + b_i$$

Multiplikation mit Zahlen

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors (Länge)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

$$|\vec{e}_i| = 1$$

Beispiele:

- gesucht ist $r = |\vec{r}|$, mit $\vec{r} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1+2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

- bestimme $\vec{e}_r =$ Einheitsvektor in Richtung \vec{r}

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{denn } |\vec{e}_r| = \frac{1}{r} |\vec{r}| = \frac{r}{r} = 1$$

Definition: Inneres Produkt = Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := ab \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

dabei ist $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$

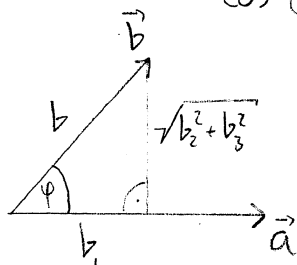
$\angle \vec{a}, \vec{b} \equiv$ Winkel zwischen Vektor \vec{a} und Vektor \vec{b}

→ Skalarprodukt invariant unter Wechsel des Koordinatensystems
 \sim wg $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$

$$\rightarrow \text{sei } \left. \begin{array}{l} \vec{a} = (a, 0, 0) \\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \sum_{i=1}^3 a_i b_i = ab_1$$

zu zeigen: $ab \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = ab_1$

$$\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{b_1}{b}$$



$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{b_1}{b} \quad \text{o.k.}$$

Eigenschaften

- Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ ($\cos(\angle \vec{a}, \vec{a}) = 1$)
- Einheitsvektoren $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$
- distributiv: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} ($a, b \neq 0$)
sind, zueinander orthogonal, $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{b} \uparrow \begin{array}{c} \varphi \\ \downarrow \\ \vec{a} \rightarrow \end{array} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \sim \quad \cos \varphi = \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Einheitsvektoren eines Koordinatensystems sind "orthonormiert"

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

mit dem Kroneckersymbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{=\delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i b_i \end{aligned}$$

Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

folgt sofort aus der Definition:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a b \underbrace{|\cos(\angle \vec{a}, \vec{b})|}_{\leq 1}$$

Äußeres Produkt (Kreuzprodukt, Vektorprodukt)

Definition: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (a kreuz b)

mit $|\vec{c}| = ab \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$ (\vec{c} ist Vektor!)

$$\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}$$

Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Matrix} \\ a_1 \quad b_1 \\ a_2 \times b_2 \\ a_3 \times b_3 \\ a_1 \times b_3 \\ a_2 \times b_1 \end{array} \right]$$

Eigenschaften

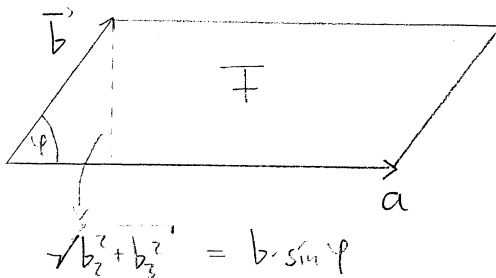
1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ nicht kommutativ

2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

wegen $\sin(\angle \vec{a}, \vec{a}) = 0$ \times der Formel für die Berechnung für $\vec{a} \times \vec{a}$

3. $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$

4. sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ab_3 \\ ab_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = a \sqrt{b_2^2 + b_3^2}$



$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| =$ Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms

aufßerdem $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi = ab \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

$$5. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

Beweis:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

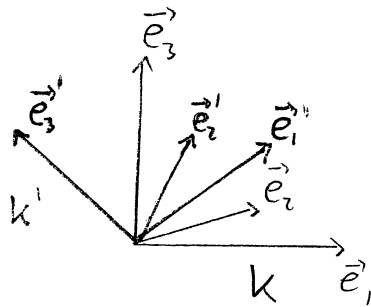
$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3$$

$$+ a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0$$

Drehung eines Koordinatensystems von K nach K'

$$K: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

$$K': \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$$



gegeben: $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

↳ Darstellung im Koordinatensystem K

gesucht: Darstellung von \vec{r} im Koordinatensystem K'

d.h. $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i$ (gesucht: x'_i)

\vec{r} selbst ist unabhängig vom Koordinatensystem

d.h. $\sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i$

Zunächst: Darstellung der neuen Basis im alten Koordinatensystem K

$$\vec{e}'_i = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + a_{i3} \vec{e}_3 \quad i=1,2,3 \quad (*)$$

⇒ 3 mal 3 Zahlen a_{ij}

Bedeutung der a_{ij} :

multipliziere (*) mit \vec{e}_j (Skalarprodukt)

$$\Rightarrow \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = a_{i1} \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_j}_{=\delta_{1j}} + a_{i2} \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{2j}} + a_{i3} \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{3j}}$$

$$= a_{ij} \quad \left[\sum_{n=1}^3 a_{in} \delta_{nj} = a_{ij} \right]$$

$$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = \underbrace{|\vec{e}_i'|}_{=1} \underbrace{|\vec{e}_j|}_{=1} \underbrace{\cos(\angle \vec{e}_i', \vec{e}_j)}_{=\varphi_{ij}}$$

Winkel zwischen neuer i-Richtung und alter j-Richtung

$$\Rightarrow a_{ij} = \cos \varphi_{ij}$$

Zurück zur Bestimmung der x_i' :

$$\sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i' \vec{e}_i' \quad | \cdot \vec{e}_j'$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'}_{=\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i} = \sum_{i=1}^3 x_i' \underbrace{\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j'}_{=\delta_{ij}}$$

$$= \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = a_{ji} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_j' = \sum_{i=1}^3 a_{ji} x_i}$$

Summation über zweiten Index

Definition der Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

= 3x3 Matrix D : Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \bullet \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\quad\quad\quad} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \approx x_i' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

Bestimmung der x_i aus den x_i'

$$\sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i' \vec{e}_i' \quad | \cdot \vec{e}_j$$

$$\boxed{x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i'}$$

Summation über ersten Index

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Drehmatrix für die umgekehrte Transformation von k' nach k

→ inverse Matrix $D^{-1} = D^t$ (transponiert)

$$\left. \begin{array}{l} \text{schreibe} \\ \vec{x}' = D \vec{x} \\ \vec{x} = D^{-1} \vec{x}' \end{array} \right\} \vec{x}' = \underbrace{D D^{-1}}_{= \text{Einheitsmatrix } \mathbb{1}} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}'$$

Beweis von $DD^{-1} = \mathbb{1}$

$$x_j' = \sum_{i=1}^3 a_{ji} x_i \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} x_k'$$

einsetzen von x_i ergibt

$$\begin{aligned}
 x_j' &= \sum_{i=1}^3 a_{ji} \sum_{k=1}^3 a_{ki} x_k' \\
 &= \sum_{k=1}^3 \underbrace{\sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{ji}}_{\stackrel{?}{=} \delta_{kj}} x_k'
 \end{aligned}$$

Beweis für $\sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{ji} = \delta_{kj} \quad \hat{=} \mathbb{D}\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{1}$

folgt aus $\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{kj}$

denn: $\vec{e}_k' = a_{k1} \vec{e}_1 + a_{k2} \vec{e}_2 + a_{k3} \vec{e}_3$

$$\vec{e}_j' = a_{j1} \vec{e}_1 + a_{j2} \vec{e}_2 + a_{j3} \vec{e}_3$$

$\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j'$ ergibt 9 Terme von denen nur die mit $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$ & $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$ übrigbleiben.

$$\Rightarrow \vec{e}_k' \cdot \vec{e}_j' = a_{k1} a_{j1} + a_{k2} a_{j2} + a_{k3} a_{j3} = \sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{ji} \quad \checkmark$$

analog gilt: $\mathbb{D}^{-1} \mathbb{D} = \mathbb{1}$

nochmal zur Matrixmultiplikation:

$\vec{x}' = \mathbb{D} \mathbb{D}^{-1} \vec{x}'$ lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{= \mathbb{1}} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \\ | & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

d.h. mit $D D^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ \text{Zeile} & \text{Spalte} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ i\text{-te Zeile von } D & j\text{-te Spalte von } D^{-1} \end{matrix}$

$$\Rightarrow D D^{-1} = \mathbb{1}$$

allgemeine Definition einer Matrix

$$\text{Matrix } A \equiv (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow m \times n\text{-Matrix}$$

\nearrow
 Matrixelemente

$m \times n$ -Matrix A hat m Zeilen und n Spalten

Einige Regeln:

1. $A = B$ wenn ...
 - $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j
 - beide Matrizen vom selben Typ

$$2. \quad C = A + B \quad : \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\quad \text{beide } m \times n \quad \Rightarrow \quad C \text{ ist } m \times n \text{-Matrix}$$

$$\text{Addition ist kommutativ} \quad : \quad A + B = B + A$$

$$3. \quad \text{Nullmatrix } O \rightarrow \text{alle Matrixelemente} = 0$$

$$\Rightarrow A + O = A$$

4. Einheitsmatrix (nur bei quadratischen Matrizen, d.h. vom Typ $n \times n$)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad I = (\delta_{ij})$$

$$5. \quad \text{sei } A = (a_{ij}) \Rightarrow \alpha A = (\alpha a_{ij})$$

6. Vektoren sind Matrizen vom Typ 1×3 bzw. 3×1

7. A^t : die zu A transponierte Matrix

sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix

$$\Rightarrow A^t = (a_{ji}) \text{ ist eine } n \times m \text{-Matrix}$$

8. Matrizenmultiplikation

45

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m_A \times n_A$ - Matrix

$B = (b_{ek})$ eine $m_B \times n_B$ - Matrix

Falls $n_A = m_B$!

$\Rightarrow C = AB$ das Produkt von A mit B mit den Matrixelementen

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n_A} a_{ij} b_{jk}$$

C ist vom Typ $m_A \times n_B$

Beispiel: $A: 2 \times 4$ - Matrix
 $B: 4 \times 3$ - Matrix } $C = AB: 2 \times 3$ - Matrix

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \circ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_C$$

9. Matrixmultiplikation ist i.A. nicht kommutativ

$$AB \neq BA$$

↑
i.A.

10. $A(BC) = (AB)C$

11. $A(B+C) = AB + AC$

nochmal zur Matrixmultiplikation

→ Vertauschbarkeit von Matrizen

sei A : $m \times n$ Matrix

B : $n \times m$ Matrix

definiere den Kommutator $C = [A, B]_- := AB - BA$

⇒ AB : $m \times m$ Matrix

BA : $n \times n$ Matrix

d.h. : um Subtraktion definieren zu können muß $n=m$ sein!

Def. : zwei Matrizen A ($n \times n$) und B ($n \times n$) vertauschen (kommutieren)

wenn $[A, B]_- = 0$

Beispiele

• $A = B \Rightarrow [A, B]_- = AA - AA = 0$

• $n=1$

• $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

→ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$

also $AB \neq BA$

Definition: unter der Determinante der $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$

Symbol $\rightarrow |A|, \text{Det}(a_{ij}), |a_{ij}|$

verstehen wir die durch folgende Vorschrift zu berechnende Zahl

$$|A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \dots (=) a_{1n} A_{1n}$$

A_{kl} : Unterdeterminante \rightarrow Determinante der Matrix, die man durch Streichung der k -ten Zeile und l -ten Spalte erhält

d.h. obige Definition ist rekursiv

Det. n -ten Grades = Summe von Det. $(n-1)$ -ten Grades

Beispiele: • (1×1) -Matrix (a_{11})

$\rightarrow |A| = a_{11}$ (Teil der Definition)

• (2×2) -Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

• (3×3) -Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\ - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

→ Sarrusche Regel für Determinanten 3. Grades

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

geht nur für Det. 3. Grades

Zahl der Summanden einer Determinante n-ten Grades:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n!$$

$n!$ Summanden mit je n Faktoren

Definition:

Determinante einer $n \times n$ -Matrix (a_{ij}) ist die Zahl

$$|A| := \sum_P (-1)^P a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

die durch Summation über alle $n!$ Permutationen $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$ der Spaltenindizes aus der „natürlichen“ Reihenfolge $1, 2, \dots, n$ entsteht

$(-1)^P$: Vorzeichen der Permutation

zur Erläuterung

die 6 Permutationen für $n=3$ und ihr Vorzeichen

1	2	3	+
1	3	2	-
2	1	3	-
2	3	1	+
3	1	2	+
3	2	1	-

jede Transposition erhält ein Minus-Zeichen

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1\ 2\ 3 \end{array} \rightarrow 2\ 1\ 3$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2\ 1\ 3 \end{array} \rightarrow 2\ 3\ 1$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1\ 2\ 3 \end{array} \rightarrow 1\ 3\ 2$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1\ 3\ 2 \end{array} \rightarrow 3\ 1\ 2$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1\ 2\ 3 \end{array} \rightarrow 3\ 2\ 1$$

Matrixinversion

zur Erinnerung: inverse Matrix einer Drehmatrix D :

$$D^{-1} = D^t, \text{ i.A. aber nicht so einfach}$$

allgemeine Definition

gegeben: quadratische Matrix A ($n \times n$) $A = (a_{ij})$

die ($n \times n$)-Matrix A^{-1} heißt invers zu A , falls

$$A^{-1} A = \mathbb{1}$$

$A^{-1} = (x_{ij})$ ebenfalls ($n \times n$)-Matrix

Bestimmung der x_{ij} : (ohne Beweis)

$$x_{ji} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i-j} A_{ij}$$

\uparrow ! \downarrow Determinante von A \swarrow Unterdeterminante

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$$x_{11} = \frac{1}{-2} 4 = -2$$

$$x_{12} = \frac{1}{-2} (-1) A_{21} = \frac{1}{-2} 2 = -1$$

$$x_{21} = \frac{1}{-2} (-1) A_{12} = \frac{1}{-2} 3 = -\frac{3}{2}$$

$$x_{22} = \frac{1}{-2} 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Behauptung: aus $A^{-1}A = \mathbb{1}$ (Linksinverse) folgt
 $AA^{-1} = \mathbb{1}$ (Rechtsinverse)

Beweis: sei B Linksinverse zu A^{-1} , d.h. $BA^{-1} = \mathbb{1}$

bilde $A^{-1}(AA^{-1}) = \underbrace{(A^{-1}A)}_{= \mathbb{1}} A^{-1} = A^{-1}$

multipliziere von links mit B

$$\Rightarrow \underbrace{(BA^{-1})(AA^{-1})}_{= \mathbb{1}} = \underbrace{BA^{-1}}_{= \mathbb{1}} \Rightarrow AA^{-1} = \mathbb{1} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow B = A$$

• Singuläre Matrizen

Matrizen mit $|A| = 0$; haben kein Inverses

• Inverse eines Produkts :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{für } |A| \neq 0 \text{ und } |B| \neq 0$$

Beweis durch Einsetzen:

$$(AB)^{-1} (AB) = \mathbb{1}$$

$$B^{-1}A^{-1} (AB) = \mathbb{1}$$

$$B^{-1} \underbrace{(A^{-1}A)}_{= \mathbb{1}} B = \mathbb{1}$$

$$B^{-1}B = \mathbb{1} \quad \checkmark$$

• Inverse einer transponierten Matrix

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

Eigenschaften von Determinanten

ausgehend von $|A| := \sum_P (-1)^P a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (*)$

1. homogen im Bezug auf die Elemente einer Zeile oder einer Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Beweis: jeder Summand in (*) enthält genau ein Element aus jeder Spalte bzw. Zeile

insb. gilt $|(\lambda a_{ij})| = \lambda^n |a_{ij}|$

2. additiv im Bezug auf ...

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \hat{a}_{11} & a_{12} + \hat{a}_{12} & \dots & a_{1n} + \hat{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Beweis: jeder Summand in (*) enthält einen Term $(a_{mj_m} + \hat{a}_{mj_m})$

$$\begin{aligned}
 & \text{d.h. } (-1)^p a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (a_{mj_m} + \hat{a}_{mj_m}) \dots a_{nj_n} \\
 & = (-1)^p a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m} \dots a_{nj_n} \quad \leadsto \text{ergibt erste Determinante} \\
 & \quad + (-1)^p a_{1j_1} a_{2j_2} \dots \hat{a}_{mj_m} \dots a_{nj_n} \quad \leadsto \text{--- zweite ---}
 \end{aligned}$$

3. Vorzeichenwechsel beim Vertauschen zweier beliebige Spalten oder Zeilen

$$\text{z.B.: } \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} a_{12} & a_{11} & \dots \\ a_{22} & a_{21} & \dots \\ a_{32} & a_{31} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{array} \right|
 \end{array}$$

4. Determinante der transponierten Matrix

$$|A^t| = |A|$$

5. Entwicklung nach beliebiger Zeile k

- durch Transpositionen die k -te Zeile zur 1-ten Zeile machen $\leadsto (-1)^{k-1}$
- Entwicklung nach 1. Zeile

$$|A| = \sum_j (-1)^{k-j} a_{kj} A_{kj}$$

\hookrightarrow Unterdeterminante

6. Entwicklung nach beliebiger Spalte (folgt aus 4 und 5)

$$|A| = \sum_i (-1)^{i-k} a_{ik} A_{ik}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

↓
Entwicklung nach 3te Zeile

7. Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen/Spalten

$$\begin{array}{c} l \\ m \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}}_{= |A|} = - \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}}_{= -|A|}$$

$$\Rightarrow |A| = 0$$

daraus folgt auch (mit λ)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{l1} & \lambda a_{l2} & \dots & \lambda a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \lambda |A| = 0$$

8. Addition von λ -Reihe m zu Reihe l

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{l1} + \lambda a_{m1} & a_{l2} + \lambda a_{m2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l1} \end{vmatrix}}_{= |A|} +$$

$$\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}_{= 0} = |A|$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \text{2. Zeile minus 1. Zeile} \\ \text{3. Zeile minus 4. Zeile} \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} \begin{matrix} = 0 \\ \downarrow \\ \text{2. Zeile} = -\frac{b}{a} \cdot \text{3. Zeile} \end{matrix}$$

9. Multiplikationstheorem

$$\text{sei } C = AB \quad \Rightarrow \quad |C| = |A| |B|$$

II. 4. Mehrfache Vektorprodukte

bisher	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Inneres Produkt (Skalarprodukt)	→ Zahl
	$\vec{a} \times \vec{b}$	Äußeres Produkt (Kreuzprodukt)	→ Vektor

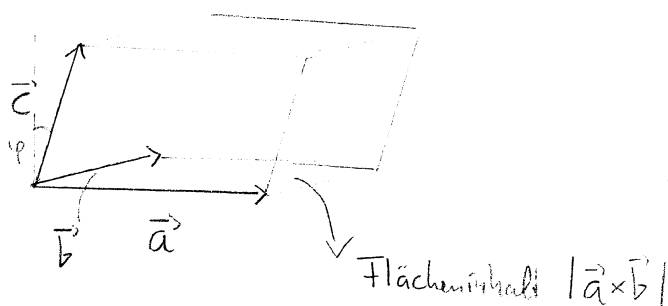
jetzt: Produkte mit mehr als zwei Faktoren

1. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$: Vektor in Richtung \vec{c}

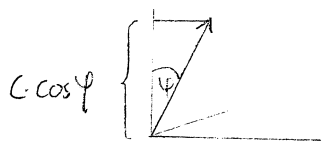
Achtung: Assoziativgesetz gilt nicht $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \neq \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \text{Zahl (Skalar)}$
↳ Spatprodukt

geometrische Bedeutung: Volumen $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds



denn: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| c \cos \varphi$



Darstellung mit Determinanten

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

\Rightarrow Spatprodukt ist invariant gegenüber zyklischer Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren (sonst: $\cdot (-1)$)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ergibt Vektor

Beispiel

• $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ da

$\rightarrow \vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$

\rightarrow Spatprodukt \approx Volumen $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$

$\rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$

II.5 lineare Gleichungssysteme

Beispiel: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad 3x + 4z = 3 \\ \text{II} \quad 2x + 2y = 1 \\ \text{III} \quad x - y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{lineares Gleichungssystem,} \\ x, y, z \text{ gehen nur linear ein} \\ \text{keine Term mit } \frac{1}{x}, \sqrt{y}, z^2, xy \\ xz^3, \dots \end{array}$$

Lösungsmethode: aus I folgt $3x = 3 - 4z$

$$x = 1 - \frac{4}{3}z \quad \text{I}'$$

I' in II und III

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{II}' : 2 \left(1 - \frac{4}{3}z \right) + 2y = 1 \\ \text{III}' : 1 - \frac{4}{3}z - y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Gleichungen mit} \\ 2 \text{ Unbekannten} \end{array}$$

usw.

alternativ: Darstellung mit Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{= M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \vec{a}}$$

die Aufgabe lautet also: bestimme den Vektor \vec{x} aus der Gleichung

$$\boxed{M \vec{x} = \vec{a}}$$

multiplizieren von links mit M^{-1} (falls $|M| \neq 0$)

59

$$M^{-1} (M \vec{x}) = M^{-1} \vec{a}$$

$$(M^{-1} M) \vec{x} = M^{-1} \vec{a}$$

$$\underbrace{\underbrace{\quad}_{= \mathbb{1}}}_{= \vec{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = M^{-1} \vec{a}}$$

d.h. Bestimmung von \vec{x} durch

1. Matrixinversion $\approx M^{-1}$ (falls $|M| \neq 0$)

2. Multiplikation $M^{-1} \vec{a}$

was passiert bei $|M| = 0$?

i, Gleichungssystem nicht lösbar

$$\text{z.B.} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

ii, mehr Unbekannte als Gleichungen

$$\text{z.B.} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{keine neue Information}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} - y$$

\Rightarrow Menge von Lösungen, statt einer eindeutigen Lösung

II.6 Eigenvektoren, Eigenwerte

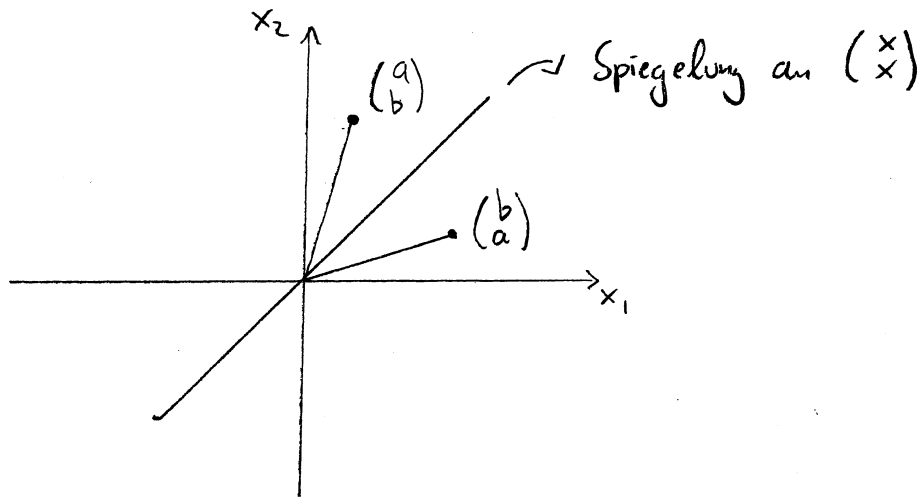
60

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Wirkung dieses "Operators" auf einen Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$M \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

geometrische Interpretation



es gibt zwei Sorten "spezielle" Vektoren

$$\rightarrow x_1 = x_2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{von der Spiegelung} \\ \text{unbeeinflusst}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1 = -x_2 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{Vektor } \times (-1)$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

Definition: \vec{x} ist Eigenvektor zur Matrix M falls

61

$$\boxed{M \vec{x} = a \vec{x}} \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{ist der zugehörige Eigenwert}$$

Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte

schreibe $M \vec{x} = a \vec{x} = a \mathbb{1} \vec{x}$

$$(M - a \mathbb{1}) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{x} = (M - a \mathbb{1})^{-1} \vec{0}$$

Gleichung gelöst?

- Falls $(M - a \mathbb{1})^{-1}$ existiert, d.h. $\det(M - a \mathbb{1}) \neq 0$

$$\Rightarrow (M - a \mathbb{1})^{-1} \vec{0} = \vec{0}$$

d.h. $\vec{x} = \vec{0}$ ist Eigenvektor zur Matrix M

trivial! \rightarrow gilt immer!

(das ist nicht, was wir wollen)

- Falls $\det(M - a \mathbb{1}) = 0$

\Rightarrow das Gleichungssystem $(M - a \mathbb{1}) \vec{x} = \vec{0}$ hat mehr Unbekannte als Gleichungen; ist aber lösbar

\Rightarrow Bedingung für die Existenz nicht-triviale Eigenvektoren

$$\boxed{\det(M - a \mathbb{1}) = 0}$$

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M - a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

$$\det(M - a\mathbb{1}) = a^2 - 1 \quad \leftarrow \text{charakteristisches Polynom}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lösungen} \quad a_1 = 1 \\ \quad \quad \quad a_2 = -1 \end{array} \right\} \text{Eigenwerte gefunden}$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

für $a_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad x_2 = x_1 \\ \text{II} \quad x_1 = x_2 \end{array} \right\} \text{nur eine Gleichung!} \\ \rightarrow x_1 = x_2 = x$$

d.h. alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu M mit
Eigenwert $a = +1$

Bedingung für $|\vec{x}|$? fehlt!

denn: Sei \vec{x} Eigenvektor zu M ; dann ist auch
(allgemein)

$\vec{y} = \alpha \vec{x}$ Eigenvektor zu M , für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

Beweis: $M\vec{y} = M\alpha\vec{x} = \alpha M\vec{x} = \alpha a\vec{x} =$
 $\alpha \alpha\vec{x} = a\vec{y}$

für $a_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad x_2 = -x_1 \\ \text{II} \quad x_1 = -x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wieder nur eine Gleichung} \\ \rightarrow x_1 = -x_2 \end{array}$$

falls erwünscht: Normierung der Eigenvektoren

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ norm. Eigenvektor zum Eigenwert } a_1 = 1$$

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad a_2 = -1$$

entartete Eigenwerte

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - a\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 2-a & 0 \\ 1 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 2-a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1-a)^2(2-a) - (2-a)$$

$$= (2-a)(1-2a+a^2-1) = (2-a)(a-2)a$$

$$= 0$$

$$\text{d.h. } (a-2)^2 a = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 2$$

$$\underline{a_1 = 0} :$$

$$M \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\} x_2 = 0 ; x_1 = -x_3$$

$$\Rightarrow \text{normierter Eigenvektor } \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a_2 = a_3 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_3 = 2x_1 ; \quad x_3 = x_1$$

$$2x_2 = 2x_2 ; \quad 0 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 2x_3 ; \quad x_1 = x_3$$

\Rightarrow nur eine Gleichung $x_1 = x_3$;

keine Gleichung für x_2

d.h. jeder \mathbb{R} -Vektor der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ist

Eigenvektor zu M mit Eigenwert 2

\rightarrow beliebige Auswahl orthonormierter Vektoren in dieser Ebene

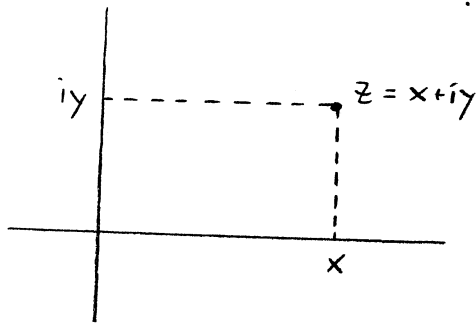
$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

III.1. Definition & Rechenregeln

Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$

Darstellung in kartesischen Koordinaten

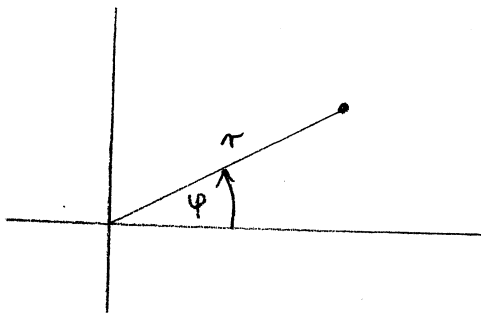
$$z = x + iy$$



Realteil $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

Imaginärteil $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

in Polarkoordinaten $z = r e^{i\varphi}$

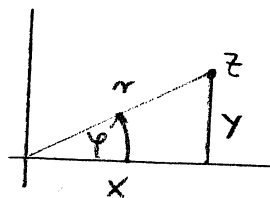


Betrag r ; $r \geq 0$

Argument φ ; $\varphi \in \mathbb{R}$
[Phase]

mit $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ [Beweis später] folgt

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$



Umrechnung von Polar- in kartesische Koordinaten

anderson:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Achtung: - $z = 0 = 0 + i \cdot 0$

$\Rightarrow r=0$ aber φ beliebig

- $z \neq 0$

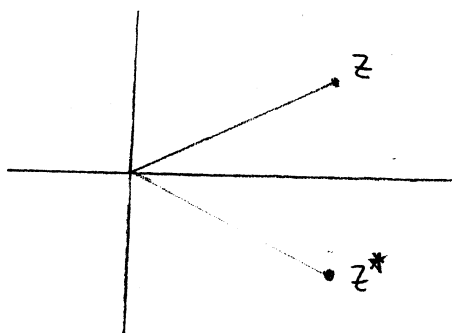
φ nur bis auf ganzzahlige Vielfaches von 2π bestimmt

Rechenregeln: sei $z_1 = x + iy$
 $z_2 = u + iv$

- Addition: $z_1 + z_2 = (x + iy) + (u + iv)$
 $= \underbrace{(x+u)}_{\operatorname{Re}(z_1+z_2)} + i \underbrace{(y+v)}_{\operatorname{Im}(z_1+z_2)}$

- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x + iy) \cdot (u + iv)$
 $= x \cdot u + x \cdot iv + iy \cdot u + iy \cdot iv$
 $= xu + i(xv + yu) + i^2 vy$
 $\stackrel{(i^2 = -1)}{=} \underbrace{(xu - vy)}_{\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2)} + i \underbrace{(xv + yu)}_{\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2)}$

- Komplexe Konjugation: sei $z = x + iy$
dann $z^* = x - iy$: konjugiert komplexe Zahl



auch \overline{z}

wozu braucht man Komplexe Zahlen?

2) Sei $f(x) = x^2 - 5x + 6$

gesucht: Nullstellen der Funktion $f(x)$

das sind: $x_{1/2} = \frac{1}{2} (5 \pm \sqrt{25 - 24})$

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$

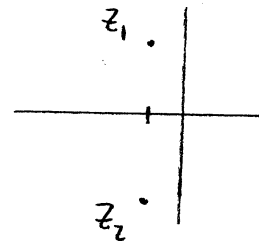
sei: $f(x) = x^2 + x + 1$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1 - 4})$$

$$= \sqrt{-3} = \sqrt{-1} \sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

besser $z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$



↳ Nullstellen der Funktion $f(z)$

warum sind Nullstellen in der komplexen Zahlenebene sinnvoll?

später:

physikalisches Problem (Mechanik, E-Dyn, ...)
z.B. in Form einer Differentialgleichung (Kap. V)

Ansatz für die Lösung

z.B. Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$

Nullstellen $z_{1/2} \in \mathbb{C}$; $x_{1/2} \in \mathbb{R}$

einsetzen
 \Rightarrow phys. Problem gelöst

ii, Funktionentheorie

↳ Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen
(siehe Kap. IV)

→ Anwendung auf Probleme der reellen Analysis

iii, elegante Behandlung der trigonometrischen Funktionen

z.B. $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$ mit $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad + i (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned}$$

Identität gilt für Real- und Imaginärteil unabhängig

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

⋮

weitere Rechenregeln und Beispiele

$$z = x + iy$$

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \stackrel{!}{=} r^2$$

merke: $z \cdot z^* \in \mathbb{R}$

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

$$r = |z|$$

• Division:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{\operatorname{Re} \frac{1}{z}} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{\operatorname{Im} \frac{1}{z}}$$

• Beispiel: $z_1 = \frac{\sqrt{2} + i}{1 - i}$, $z_2 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{2} + i}{1 - i}}{\frac{1 + i}{\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2} + i)\sqrt{2}}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + \sqrt{2}i}{2} = 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

• Berechnung von $\operatorname{Re} z_1$ und $\operatorname{Im} z_1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{2} + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + i)(1 + i) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)}_{\operatorname{Re} z_1} + i \underbrace{\frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1)}_{\operatorname{Im} z_1} \end{aligned}$$

• $z_2^2 = z_2 \cdot z_2 = \frac{1}{2} (1 + i)^2 = \frac{1}{2} (1 + 2i - 1) = i$

Ende Beispiel

allg:

• $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2 \operatorname{Re} z$

• $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i \operatorname{Im} z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \\ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) \end{cases}$$

• mehr zu $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

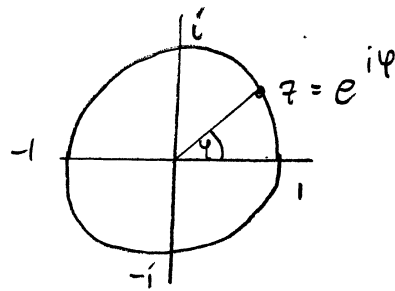
$$|e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{i\varphi}} = \dots$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$$

$$\dots = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{i\varphi - i\varphi} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{oder: } e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{i\varphi}} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \end{aligned}$$

die durch $z = e^{i\varphi}$ definierten komplexen Zahlen liegen auf dem Einheitskreis



$$\rightarrow e^0 = 1$$

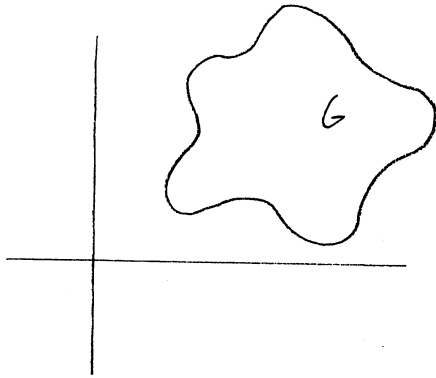
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$e^{2\pi i} = 1$$

III.2 Gebiete in der komplexen Zahlenebene



Gebiet $G \subset \mathbb{C}$

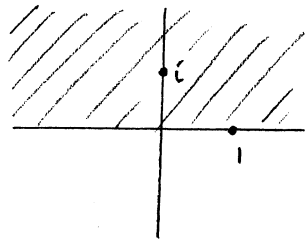
Teilmenge der komplexen Ebene \mathbb{C}

[analog zu Intervallen in der reellen Analysis]

Beispiele von Gebieten

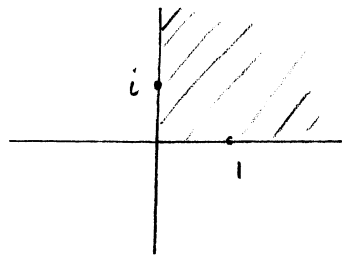
1. Die komplexe Ebene selbst $G = \mathbb{C}$

2. Die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$



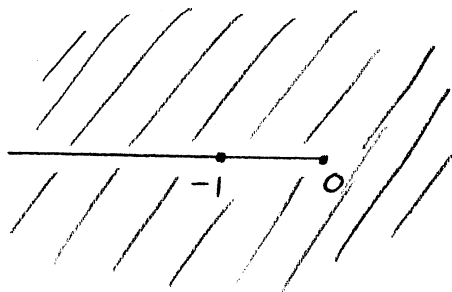
analog: untere, rechte & linke Halbebene

3. Viertel Ebene oder rechter oberer Quadrant



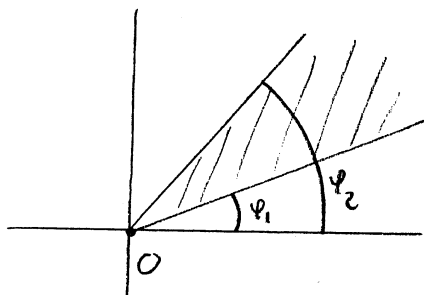
4. Die geschlitze Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z \mid z \leq 0\}$

(Achtung: $z \leq 0$ impliziert $z \in \mathbb{R}$)

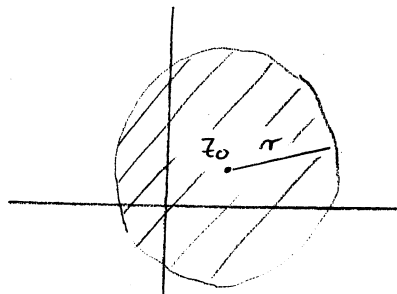


eigentlich: negativ geschlitze Ebene

5. Sektoren $\{re^{i\varphi} \mid r > 0, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$



6. Kreisscheiben $E_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$

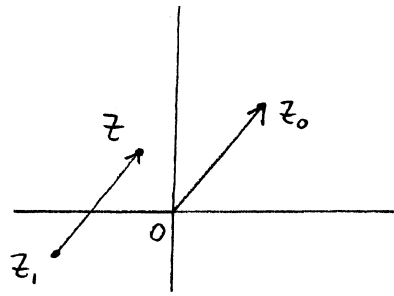


speziell: Einheitskreisscheibe $E = E_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

III.3. Anschauliche Bedeutung einiger Rechenoperationen

1. Addition einer festen Zahl z_0

$$z = z_1 + z_0$$



$\hat{=}$ Translation

2. Multiplikation mit einer festen Zahl z_0

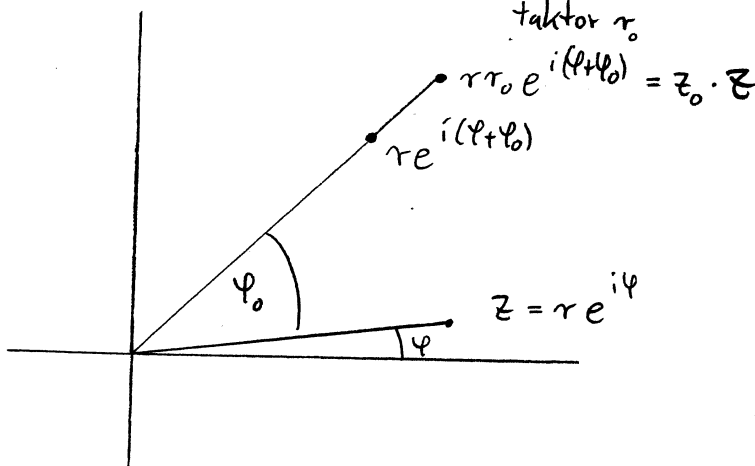
am besten in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\varphi} \\ z_0 &= r_0 e^{i\varphi_0} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} z &= r e^{i\varphi} \\ z_0 &= r_0 e^{i\varphi_0} \end{aligned} \right\} z \cdot z_0 = r r_0 e^{i(\varphi + \varphi_0)}$$

Steckung um
Faktor r_0

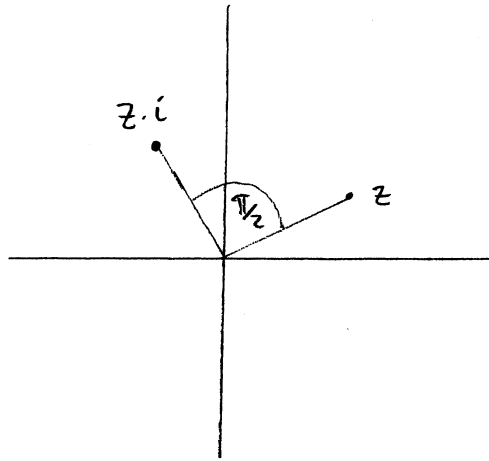
Drehung um Winkel φ_0



Beispiel: $z_0 = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow r_0 = 1, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$= \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1}$$



3. Quadrieren, allg: Potenzieren $z \rightarrow z^n$

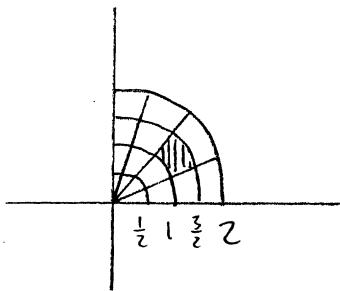
wieder in Polarkoordinaten

$$z = r e^{i\varphi}$$

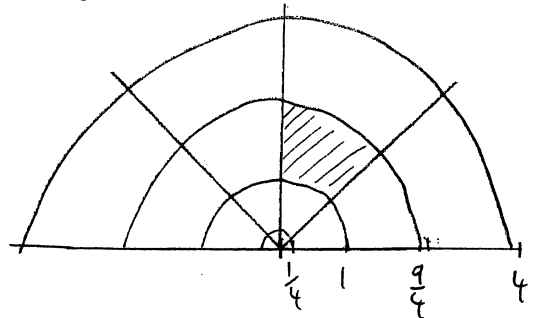
$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$n=2$

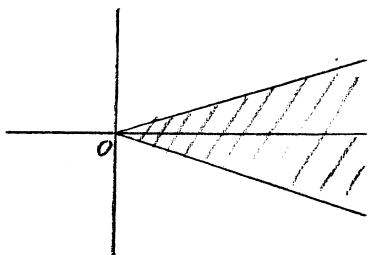
Viertelebene wird zur Halbebene aufgeklappt



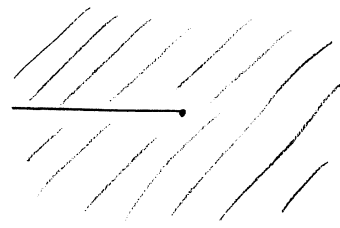
Quadrieren
 $z \mapsto z^2$



Wirkung von $z \mapsto z^n$ auf den durch $-\frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{\pi}{n}$ definierten Sektor



Potenzieren
 $z \mapsto z^n$

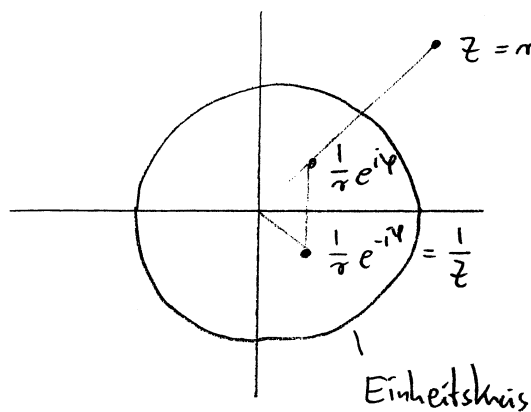


geschaltete Ebene

4. Der Kehrwert $z \mapsto \frac{1}{z}$

$$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

$$\left[\text{Beweis: Bilde } z \cdot \frac{1}{z} \right. \\ \left. \sim \frac{r}{r} e^{i\varphi - i\varphi} \right]$$



\Rightarrow 2 Schritte

1. "Spiegelung an der Einheitskreislinie"

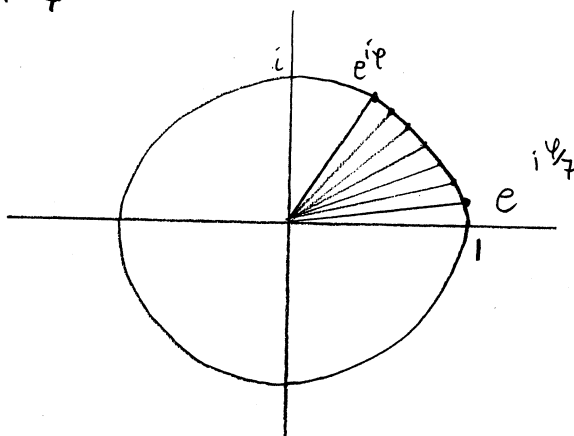
2. Spiegelung an der reellen Achse

5. Das Wurzelziehen (schwierig)

Def.: n -te Wurzel einer komplexen Zahl $\sqrt[n]{z}$
 ergibt beim n -fachen Potenzieren wieder z
 d.h. $(\sqrt[n]{z})^n = z$

Beispiel: Sei $z = r e^{i\varphi}$
 $\Rightarrow \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n}$ ist eine n -te Wurzel von z
 $(\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\varphi/n})^n = \underbrace{(\sqrt[n]{r})^n}_r \underbrace{(e^{i\varphi/n})^n}_{= e^{i\varphi/n \cdot n} = e^{i\varphi}} = e^{i\varphi}$

$$r=1, n=7$$



Achtung: φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt

\Rightarrow ersetze φ durch $\varphi' = \varphi + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z' = r e^{i\varphi'} = r e^{i\varphi + ik2\pi} = r e^{i\varphi} \underbrace{e^{ik2\pi}}_{\substack{= 1 \\ (e^{2\pi i})^k}} \stackrel{!}{=} z$$

damit ist auch

$$\sqrt[n]{r} e^{i\varphi'/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n + i \frac{k2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} e^{i \frac{k2\pi}{n}}$$

eine n -te Wurzel von z

\uparrow als Formel mehrmals hinschreiben

„die n Wurzeln z_n der komplexen Zahl $z = \dots$ “

Wieviele n -te Wurzeln gibt es

genau n -Stück; z.B. $k = 0, 1, \dots, n-1$

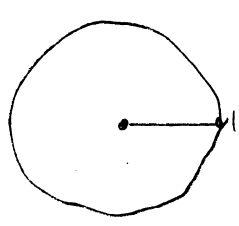
$$\left. \begin{array}{l} \text{denn } e^{i \frac{k2\pi}{n}} \quad \underline{k=n} \quad e^{i2\pi} = 1 \\ e^{i \frac{k2\pi}{n}} \quad \underline{k=0} \quad e^0 = 1 \end{array} \right\} \text{dieselbe Zahl}$$

Einheitswurzeln:

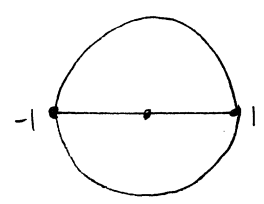
\rightarrow die n -ten Wurzeln der Zahl 1

$1 = e^{2\pi i}$

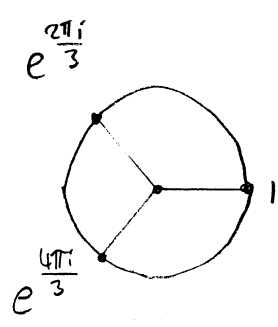
$$e^{2\pi i \frac{k}{n}} \quad k = 0, \dots, n-1$$



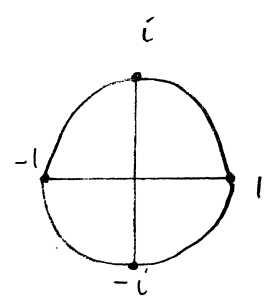
$n=1$



$n=2$



$n=3$



$n=4$

Übung:

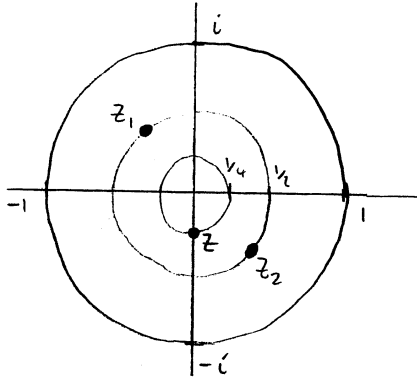
$$\sqrt{-\frac{i}{4}} = ?$$

$$z = -\frac{i}{4} = r e^{i\varphi}$$

77

$$r = \frac{1}{4}, \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi$$

graphisch



$$\sqrt{r} = \frac{1}{2}$$

⇒ beide Wurzeln von z
liegen auf Kreis mit
Radius $\frac{1}{2}$

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad z_2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{3}{4}\pi + i\pi} = \frac{1}{2} e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

III.4 Komplexe Differenzierbarkeit; analytische Funktion

jetzt: $f(z)$ komplexwertige Funktion mit komplexwertigen Argumenten $z \in G \subset \mathbb{C}$

analog zu Funktionen in \mathbb{R}

Eingabe $z \in G \subset \mathbb{C} \Rightarrow$ Ausgabe $f(z) \in \mathbb{C}$

(Wertbereich i.A. eingeschränkt)

z.B. $f(z) = z^2 + 5 \quad z \in \mathbb{C}$

sei $z = x + iy$ x : Realteil
 y : Imaginärteil

$$\Rightarrow f(z) = (x + iy)^2 + 5 = \underbrace{x^2 - y^2 + 5}_{\operatorname{Re} f(z)} + i \underbrace{2xy}_{\operatorname{Im} f(z)}$$

Definition: komplex differenzierbar; analytisch

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion
 f heißt komplex differenzierbar oder analytisch, wenn für jedes $z_0 \in G$ der Limes des Differenzenquotienten

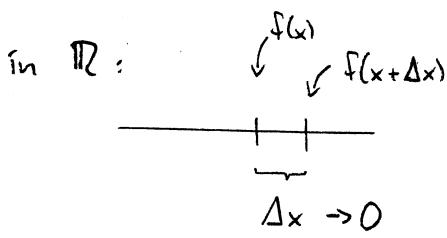
$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)} \quad \text{existiert}$$

$f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$: Ableitung von f an der Stelle z_0

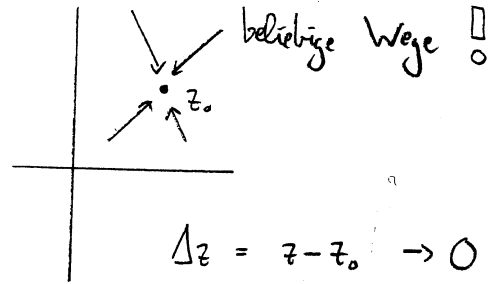
$f'(z)$: Ableitung von f

$f(z)$: Stammfunktion von f'

was bedeutet $\lim_{z \rightarrow z_0}$?



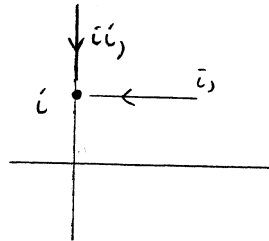
in \mathbb{C}



$f'(z_0)$ unabhängig von der Richtung ?

Beispiel: $f(z) = z^2$, $z_0 = i \rightsquigarrow f(z_0) = -1$

Zwei Wege:



$i, z = i + \epsilon$

$i\epsilon, z = i + \epsilon i$

$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z) + 1}{z - i}$

$i, z = i + \epsilon, f(z) = \epsilon^2 - 1 + 2i\epsilon$

$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2i\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} = 2i$

$i\epsilon, z = i + \epsilon i, f(z) = -(1 + \epsilon)^2 = -1 - 2\epsilon - \epsilon^2$

$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-2\epsilon - \epsilon^2}{\epsilon i} = -\frac{2}{i} = 2i$

stimmt überein !

formal: schreibe $\lim_{z \rightarrow z_0} \rightsquigarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0}$; $f(z) = f(z_0 + \Delta z)$
↑ beliebige Richtung

in diesem Beispiel: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left((z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 \right)$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} (2z_0 \Delta z + \Delta z^2) = 2z_0$$

d.h. Ableitung von $f(z) = z^2$: $f'(z) = 2z$

insb. $f'(i) = 2i$

Interpretation der Ableitung (als Steigung):

in \mathbb{R} : für x nahe x_0 gilt $f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$

↑
Steigung am Punkt x_0

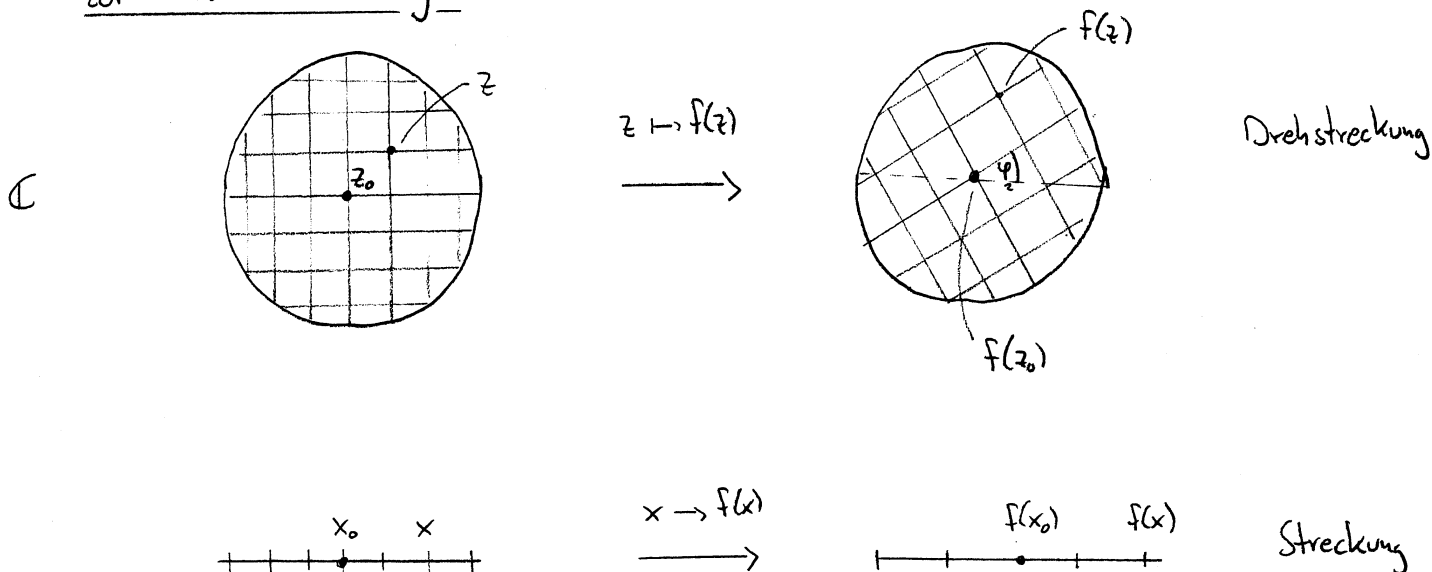
in \mathbb{C} : für z nahe z_0 gilt:

$$f(z) \approx f(z_0) + \underbrace{(z-z_0)}_{r_1 e^{i\varphi_1}} \cdot \underbrace{f'(z_0)}_{r_2 e^{i\varphi_2}} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Drehstreckung

$f'(z_0)$ gibt den Faktor und Winkel der Drehstreckung an

zur Veranschaulichung:



Wann ist eine Funktion $f(z)$ analytisch? \rightarrow darstellbar als Funktion von z , oder

81

Cauchy-Riemansche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{sei } f(z) &= u(z) + i v(z) \\ &= u(x,y) + i v(x,y) \end{aligned}$$

$f(z)$ ist genau dann analytisch, wenn die $u(x,y)$ & $v(x,y)$ partiell differenzierbar sind (d.h. $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)$, ...) und die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \end{aligned}} \quad (*)$$

folgt direkt aus der Gleichung

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$$

$$\Rightarrow u(x,y) + i v(x,y) = f(z_0) + (x + iy - z_0) f'(z_0)$$

partielle Ableitungen:

$$\text{I } \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = f'(z_0)$$

$$\text{II } \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = i f'(z_0)$$

$$\text{Gl. I} \cdot i$$

$$\Rightarrow i \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$$

gilt für Real- und Imaginärteil unabhängig $\Rightarrow (*)$

Beispiele:

$$1. \quad f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + x)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(y + 2xy)}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 2x + 1 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = 2x + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -2y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = 2y$$

$\Rightarrow f(z)$ analytisch

$$2. \quad f(z) = \underbrace{(x^2 - y^2 + x)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(-y + 2xy)}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 2x + 1 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = 2x - 1$$

$\Rightarrow f(z)$ nicht analytisch!

denn: 1. $f(z) = z^2 + z$

2. $f(z) = z^2 + \bar{z}$

\hookrightarrow nicht analytisch

analytisch sind also folgende Funktionen:

$$f(z) = z_0 \quad \rightarrow \quad f'(z) = 0$$

$$f(z) = z \quad \rightarrow \quad f'(z) = 1$$

$$f(z) = z^m \quad \rightarrow \quad f'(z) = m z^{m-1} \quad m = 1, 2, \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \rightarrow \quad f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^m} = z^{-m} \quad \rightarrow \quad f'(z) = (-m) z^{-(m+1)} = -\frac{m}{z^{m+1}}$$

$$m = 1, 2, \dots$$

III.5 die elementaren Funktionen im Komplexen

• Potenzreihen:

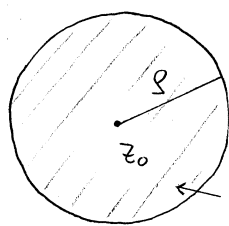
Potenzreihe um z_0 :
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow a_n \in \mathbb{C}$: Koeffizienten

$f(z)$ ist analytisch in dem Gebiet, in dem die Potenzreihe konvergiert

Konvergenzbereich ist kreisförmig!

ρ : Konvergenzradius



Divergenz außen

Konvergenz innen

speziell: $\rho = 0 \rightarrow$ Potenzreihe konvergiert nur bei $z = z_0$

$\rho = \infty \rightarrow$ ——— " ——— überall

• Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}$$

\rightarrow Potenzreihe um $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$

$\rightarrow \rho = \infty$

d.h. e^z ist auf ganz \mathbb{C} eine analytische Funktion

Definition

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

ganz analog zu e^x , $\sin x$, $\cos x$ für $x \in \mathbb{R}$

und natürlich gilt $e^z = e^x$ für $z = x \in \mathbb{R}$

hyperbolische Funktionen

$$\sinh z := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sind auf ganz \mathbb{C} analytische Funktionen.

Eigenschaften

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Beweis:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \frac{z^n}{n!}$$

$$(i)^n = 1, i, -1, -i, 1, \dots$$

$$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$$

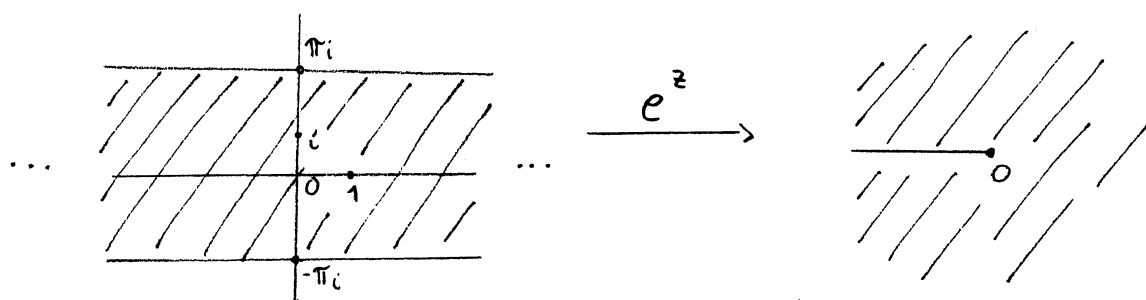
$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}}_{= \cos z} + i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{= \sin z}$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

der komplexe Logarithmus

Zunächst, die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ bildet den $(z = x+iy)$
 horizontalen Streifen von $y = -\pi$ bis $y = +\pi$ ($-\pi < y < \pi$)
 auf die geschlitzte Ebene ab.



denn:

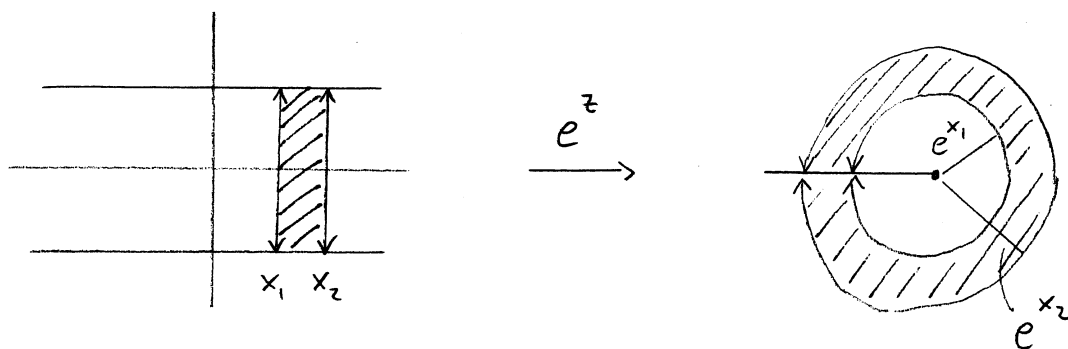
$$z = x + iy$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = r e^{i\varphi}$$

mit $r = e^x > 0$

$$\varphi = y \in]-\pi, \pi[$$

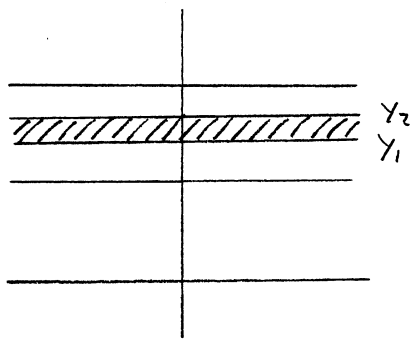
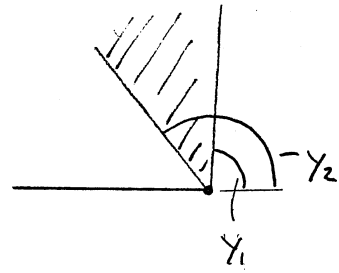
Wirkung von e^z auf vertikale Abschnitte



$$z = x + iy \left\{ \begin{array}{l} -\pi < y < \pi \\ x_1 < x < x_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\pi < \varphi < \pi \\ e^{x_1} < r < e^{x_2} \end{array} \right\} e^z = r e^{i\varphi}$$

Wirkung von e^z auf horizontale Streifen

86

 $e^z \rightarrow$ 

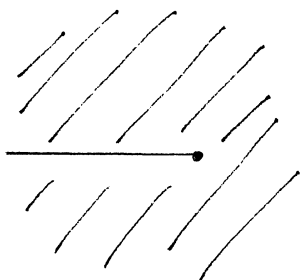
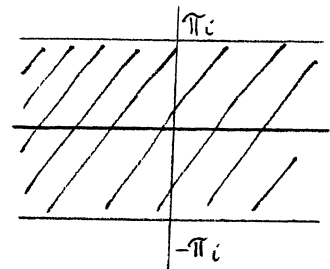
$$z = x + iy \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ y_1 < y < y_2 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$$\begin{cases} 0 < r < \infty \\ y_1 < \varphi < y_2 \end{cases}$$

Logarithmus als Umkehrabbildung von e^z

Definition: der sog. Hauptzweig des Logarithmus ist die Umkehrung der Abbildung e^z des horizontalen Streifens $\{z \mid -\pi < y < \pi\}$ auf die geschlitze Ebene.

 $\ln z \rightarrow$ 

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi})$$

$$= \ln r + i\varphi$$

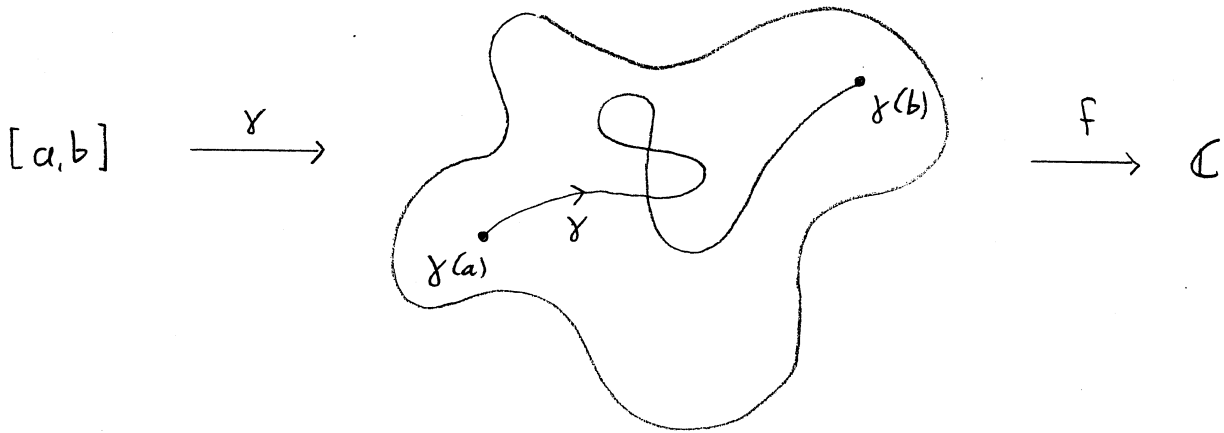
denn: (Umkehrabbildung)

$$e^{\ln z} = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} e^{i\varphi} = r e^{i\varphi} = z \quad \checkmark$$

Definition: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

$\gamma: [a, b] \rightarrow G$ darin verlaufender Weg $a, b \in \mathbb{R}$

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertige Funktion auf G



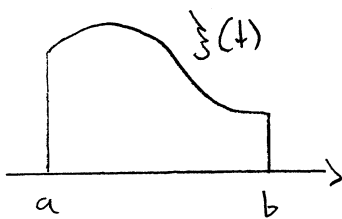
definiere $\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ ($\frac{d\gamma(t)}{dt} = \dot{\gamma}(t)$)

Integral über Weg in der komplexen Ebene

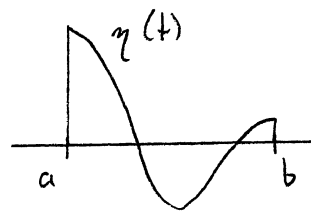
Integral über reelles Intervall $[a, b]$

zerlege: $f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = \xi(t) + i \eta(t)$

\Rightarrow integrieren Real- und Imaginärteil unabhängig



\Rightarrow Fläche F_1



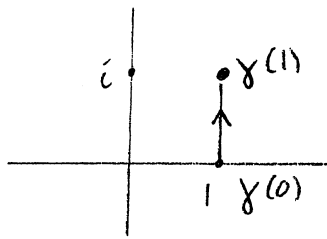
Fläche F_2

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = F_1 + i F_2$

Beispiel: $f(z) = z$

88

$$\gamma: [a, b] \rightarrow G, \quad \gamma(t) = 1 + it \quad \begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \end{array}$$



$$\dot{\gamma}(t) = i$$

$$f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = f(1+it) \cdot i = (1+it) \cdot i = -t + i$$

$$\Rightarrow \xi(t) = -t, \quad \eta(t) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Flächen: } F_1 = \int_0^1 (-t) dt = -\frac{1}{2} \\ F_2 = \int_0^1 1 dt = 1 \end{array} \right\} \int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2} + i$$

geht auch einfacher: $F(z) = \frac{1}{2} z^2$ ist Stammfunktion zu $f(z) = z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1+i) - F(1) \\ &= \frac{1}{2} (1+i)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1+2i-1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i \quad \checkmark \end{aligned}$$

allgemein: f analytische Funktion auf einem Gebiet G

besitzt auf $U \subset G$ eine Stammfunktion F

(d.h. analytische Funktion mit $F'(z) = f(z)$)

für Integrationswege γ , die ganz in U verlaufen, gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = [F]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

IV.1. Grundbegriffe

was ist eine Differentialgleichung? (Dgl)

→ Gleichung, die die Funktion und ihre Ableitungen enthält

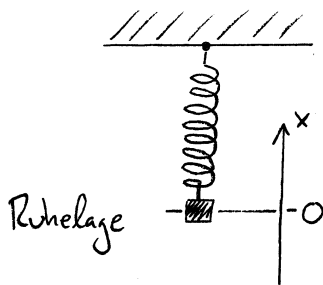
z.B. $f(x) = f'(x)$ (*)

○ Aufgabe: Lösung der Differentialgleichung, d.h. Auffinden der Funktionen $f(x)$

in (*) : $f(x) = e^x$; mit $f'(x) = e^x$ o.k.

einige Beispiele aus der Physik

a) Masse an einer Feder



Bewegung wird beschrieben durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{Dgl}$$

x : Auslenkung

t : Zeit

ω : enthält Federhärte, Masse

- gesucht : Lösung der Dgl. → $x(t)$

hier $x(t) = \sin(\omega t)$

[später: Amplitude, Anfangbed.]

denn $x'(t) = \omega \cos(\omega t)$

$$x''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

Klassifizierung dieser Dgl:

gewöhnliche, homogene Dgl zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
 (1) (2) (3) (4)

(1): enthält keine partiellen Ableitungen (später)

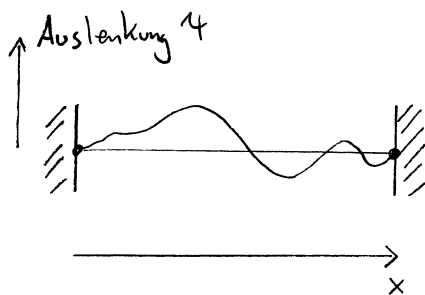
(2): homogen: enthält keine Terme mit $x(t), x'(t), \dots$
 nicht wie in $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$ oder $a(t)$
 \hookrightarrow inhomogen

(3): höchste, vorkommende Ableitung: $\frac{d^2}{dt^2}$

(4): Gegenbeispiel $t \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$
 \hookrightarrow nicht-konstanter Koeffizient

b

schwingende Saite



Zeit- und Ortsabhängigkeit der Auslenkung $u(t, x)$ beschrieben durch

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

\rightarrow partielle, homogene Dgl. zweite Ordnung mit konstanten Koeff.

c, Quantenmechanik: Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

Lösung der SG \rightarrow Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(\vec{r}, t)$

partielle, homogene Dgl. zweite Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten

d, Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \hat{\rho}(\vec{r}, t) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

...

Lösung der Maxwell-Gleichungen \rightarrow elektrische und magnetische Feld bei vorgegebener Ladungs- und Stromdichte

System gekoppelte, partielle Dgl. erste Ordnung, teilweise inhomogen mit konstanten Koeffizienten

lineare Differentialgleichungen

\rightarrow gesuchte Funktion und Ableitungen treten nur linear auf

sonst: nicht-lineare Dgl

\hookrightarrow enthält z.B. Terme der Form $(f(x))^2$, $f(x) \cdot f'(x)$, ...

Lösungen
 $f_1(x)$ und $f_2(x)$ seien \forall einer homogenen, linearen Dgl.

\rightarrow betrachte die Linearkombination $f_3(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ $c_{1/2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_3(x)$ ist ebenfalls Lösung dieser Dgl!

Beispiel: $f'(x) + f(x) = 0$

Beweis durch Einsetzen von $f_3(x)$

nicht-homogene linear Dgl

92

z.B. $f'(x) + f(x) = a(x)$ (*) $a(x)$ gegeben
 $f(x)$ gesucht

Achtung: Linearkombinationen sind i.A. keine Lösungen der Dgl (*)

Beweis: seien $f_1(x), f_2(x)$ Lsg. der Dgl. (*)

bilde $f_3(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

einsetzen ergibt: $f_3'(x) + f_3(x) =$

$$= \underbrace{c_1 f_1'(x) + c_1 f_1(x)}_{c_1 a(x)} + \underbrace{c_2 f_2'(x) + c_2 f_2(x)}_{c_2 a(x)} =$$

$$= (c_1 + c_2) a(x)$$

$\Rightarrow f_3(x)$ ist nur dann eine Lsg. der inhomogenen Dgl. (*) wenn $c_1 + c_2 = 1$

d.h. $f_3(x) = c_1 f_1(x) + (1 - c_1) f_2(x)$

betrachte jetzt die entsprechende homogene Dgl.

$$g'(x) + g(x) = 0 \quad (**)$$

Behauptung: sei $f(x)$ Lsg. von (*)

$g(x)$ Lsg. von (**)

$$\Rightarrow h(x) = f(x) + c g(x) \text{ ebenfalls Lsg. von (*) } c \in \mathbb{R}$$

Beweis: $h'(x) + h(x) = \underbrace{f'(x) + f(x)}_{= a(x)} + c \underbrace{(g'(x) + g(x))}_{= 0} = a(x)$

IV.2 gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

93

nochmals: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ (*) linear, homogen

→ systematische Lösung von Dgl dieses Typs

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t}$ dh. Annahme einer speziellen Form für die Lösung

$$\Rightarrow x'(t) = A \alpha e^{\alpha t} = \alpha x(t)$$

$$x''(t) = \alpha^2 x(t)$$

⋮

$$x^{(n)}(t) = \alpha^n x(t)$$

einsetzen in (*) ergibt

$$\alpha^2 x(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \text{für } A \neq 0 \text{ dh. } x(t) \neq 0 \text{ folgt}$$

$$\boxed{\alpha^2 + \omega^2 = 0} \quad \rightarrow \quad \alpha_{1/2} = \pm i\omega \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

dh. Reduzierung der Dgl. auf eine algebraische Gleichung!

⇒ Lösungen der Dgl

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = A_2 e^{-i\omega t}$$

Dgl ist linear und homogen ⇒ allgemeine Lösung $x(t)$ ist die Linearkombination $x_1(t) + x_2(t)$

$$\boxed{x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}} \quad A_i \in \mathbb{C}$$

Umschreiben in sin und cos:

94

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\&= \underbrace{(A_1 + A_2)}_{=: B_1} \cos \omega t + \underbrace{(iA_1 - iA_2)}_{=: B_2} \sin \omega t \\&= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t\end{aligned}$$

allgemeine, homogene, gewöhnliche Dgl mit konstanten Koeffizienten

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

Ansatz auch hier: $x(t) = A e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow a_n \alpha^n x(t) + a_{n-1} \alpha^{n-1} x(t) + \dots + a_1 \alpha x(t) + a_0 x(t) = 0$$

für $A \neq 0$ folgt also

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

α_i seien die Lösungen dieser algebraischen Gleichung ($i=1, \dots, n$)

\Rightarrow allgemeine Lösung

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t}$$

warum geht das nur bei konstanten Koeffizienten?

Beispiel: $x''(t) - t \cdot x(t) = 0$

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow \alpha^2 x(t) - t x(t) = 0$$

$$\alpha^2 = t \quad \alpha = \pm \sqrt{t}$$

Achtung! in $x''(t) = \alpha^2 x(t)$ wird α unabhängig von t angenommen!

nächstes Beispiel:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \quad (*)$$

$$x(t) = A e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 = 0 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1(t) = A e^t$$

↳ entartete Lösung der algebraischen Gleichung

wie lautet die zweite Lösung?

Ansatz $x_2(t) = x_1(t) f(t)$

$$\Rightarrow x_2'(t) = x_1'(t) f(t) + x_1(t) f'(t)$$

$$= x_1(t) (f(t) + f'(t))$$

$$x_2''(t) = x_1'(t) (f(t) + f'(t))$$

$$+ x_1(t) (f'(t) + f''(t))$$

$$= x_1(t) (f(t) + 2f'(t) + f''(t))$$

einsetzen in (*) ergibt

↑ siehe oben
 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$
 $\alpha = 1$ hier!
 $\Rightarrow x_1(t) = x_1'(t)$

$$x_1(t) \left(f(t) + 2f'(t) + f''(t) - 2f(t) - 2f'(t) + f(t) \right) = 0$$

$$\underbrace{x_1(t)}_{\neq 0} f''(t) = 0$$

$$\Rightarrow f''(t) = 0$$

$$f'(t) = C$$

$$f(t) = Ct + B$$

\Rightarrow die zweite Lösung lautet

$$x_2(t) = A e^t (Ct + B)$$

und damit folgt für die allgemeine Lösung

$$x(t) = (A + Bt) e^{kt}$$

Achtung, nicht dieselben
 A, B

physikalisches Beispiel:

Masse an eine Feder mit zusätzlicher Reibung der Form

$$-2\gamma \frac{dx}{dt} \quad (\text{d.h. proportional der Geschwindigkeit})$$

Dgl:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Ansatz: $x(t) = A e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$

die beiden Lösungen für α lauten

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Fallunterscheidung

97

1, $\omega > \gamma$ schwache Dämpfung

$$\gamma^2 - \omega^2 < 0$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = i \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = i \omega' \quad \omega' \text{ reell}$$

$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm i \omega'$$

2, $\omega = \gamma$ mittlere Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

3, $\omega < \gamma$ starke Dämpfung (Kriechfall)

$$\gamma^2 - \omega^2 > 0$$

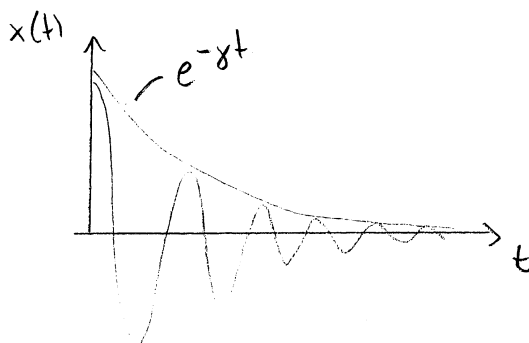
$$\alpha_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad \text{beide} < 0$$

Diskussion der einzelnen Fälle

1, schwache Dämpfung

allgemeine Lösung $x(t) = e^{-\gamma t} [A e^{i\omega' t} + B e^{-i\omega' t}]$
 $= e^{-\gamma t} [C \cos \omega' t + D \sin \omega' t]$

physikalische Lösung: C und D reell



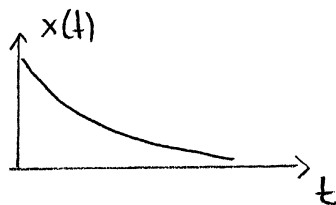
→ gedämpfte Schwingung mit
Frequenz $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < \omega$

2, aperiodischer Grenzfall

$$\gamma \rightarrow \omega \quad \text{d.h.} \quad \omega' \rightarrow 0$$

Periode der gedämpften Schwingung $\rightarrow \infty$

allgemeine Lösung $x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$

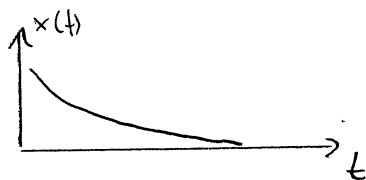


\hookrightarrow da $\alpha_1 = \alpha_2$

3, starke Dämpfung

allgemeine Lösung: $x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t}$

$$\text{mit } \gamma_{1/2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad \text{beide} > 0$$



stärkerer Abfall als in 2!

dominierende Terme für große t:

2, $Bt e^{-\gamma t}$

3, $A_2 e^{-\gamma_2 t}$

$$\gamma_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Erweiterung auf den inhomogenen Fall

speziell: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t) \quad (*)$

mit $f(t) = F e^{i\Omega t}$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{i\Omega t}$

dasselbe Ω wie in $f(t)$! 99

$$\Rightarrow x'(t) = i\Omega x_0 e^{i\Omega t}$$

$$x''(t) = -\Omega^2 x_0 e^{i\Omega t}$$

einsetzen in (*) ergibt

$$-\Omega^2 x_0 e^{i\Omega t} + \omega^2 x_0 e^{i\Omega t} = \bar{F} e^{i\Omega t}$$

$$x_0 (\omega^2 - \Omega^2) = \bar{F} \quad x_0 = \frac{\bar{F}}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{\bar{F}}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$$

spezielle Lösung, keine freien Parameter

allgemeine Lösung -

$$x(t) = \frac{\bar{F}}{\omega^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

A_1, A_2 beliebig (festgelegt durch Anfangsbedingungen)

Falls Zeit bleibt: Beweis !

IV.3 gewöhnliche Dgl mit nicht-konstanten Koeffizienten

IV.3.1 erste Ordnung

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = 0} \quad (*)$$

gegeben: $p(x)$

gesucht: $y(x)$

Lösung der Dgl. (*)

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$
$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = - \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad \text{mit } y_1 = y(x_1)$$
$$y_2 = y(x_2)$$

sei $P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

=>

$$\left[\ln y \right]_{y_1}^{y_2} = -P(x_2) + P(x_1)$$

$$\ln \frac{y_2}{y_1} = P(x_1) - P(x_2)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{P(x_1) - P(x_2)}$$

$$y(x_2) = \underbrace{y(x_1) e^{P(x_1)}}_A e^{-P(x_2)}$$
$$= A$$

schreibe

$$x_2 = x$$

=>

$$\boxed{y(x) = A e^{-P(x)}}$$

Test: $\frac{dy}{dx} = \underbrace{A e^{-P(x)}}_{y(x)} \cdot \underbrace{\frac{dP}{dx}}_{p(x)} \cdot (-1) \quad \checkmark$

Erweiterung auf den inhomogenen Fall

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x)} \quad (*)$$

Ansatz: $y(x) = \underbrace{e^{-P(x)}}_{\text{Lösung der homogenen Dgl}} v(x)$

$$y'(x) = e^{-P(x)} v'(x) - \underbrace{v(x) p(x) e^{-P(x)}}_{= p(x)y(x)}$$

einsetzen in (*) ergibt

$$e^{-P(x)} v'(x) = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = q(x) e^{P(x)}$$

sei $Q(x)$ eine Stammfunktion zu $q(x) e^{P(x)}$,

$$\Rightarrow v(x) = Q(x) + c$$

$$\boxed{y(x) = e^{-P(x)} (Q(x) + c)}$$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} + \frac{1+x}{x} y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

d.h. $p(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow P(x) = x + \ln x$

$$q(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$q(x) e^{P(x)} = \frac{e^{-x}}{x} \underbrace{e^{(x + \ln x)}}_{= x e^x} = 1$$

$$\Rightarrow Q(x) = x$$

102

$$y(x) = \underbrace{e^{-x-\ln x}}_{\frac{e^{-x}}{x}} (x+c)$$

$$y(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{c}{x}\right)$$

"Anfangsbedingung:"

$$\text{z.B. } y(1) = 0$$

$$e^{-1} \underbrace{(1+c)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow c = -1$$

$$y(x) = e^{-x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

jetzt allgemein

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -\frac{p(x)}{q(y)}$$

nicht ganz so allgemein

reduziert sich für $q(y) = \frac{1}{y}$ auf $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ (siehe oben)

jetzt: beliebige $q(y)$

Methode: Separation der Variablen

$$p(x) dx + q(y) dy = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} q(y) dy = 0$$

sei $P(x)$ Stammfunktion zu $p(x)$

$Q(y)$ — " — $q(y)$

$$P(x_2) - P(x_1) + Q(y_2) - Q(y_1) = 0$$

auch hier: $y_1 = y(x_1)$

$$y_2 = y(x_2)$$

schreibe $x_2 = x$ $y_2 = y$

$$\Rightarrow \boxed{Q(y) = -P(x) + C}$$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{y} = 0$

(nicht-lineare Dgl.)
 $\rightsquigarrow \frac{1}{y}$

$$p(x) = x^2 \rightarrow P(x) = \frac{1}{3} x^3$$

$$q(y) = y \rightarrow Q(y) = \frac{1}{2} y^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2C - \frac{2}{3} x^3}}$$

Test $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2C - \frac{2}{3} x^3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (-1) = -\frac{x^2}{y}$ ✓

ausnahmeweise: nicht-lineare Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m} \quad m \neq 1$$

\hookrightarrow nicht-linear

Trick: setze $v(x) = y^{1-m}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = (1-m) y^{-m} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-m)} y^m \frac{dv}{dx}$$

einsetzen in Dgl.

$$\frac{1}{1-m} y^m \frac{dv}{dx} + p(x)y = q(x)y^m \quad | \cdot y^{-m} \quad 104$$

$$\frac{1}{1-m} \frac{dv}{dx} + \underbrace{p(x)y^{1-m}}_{=v(x)} = q(x) \quad | \cdot (1-m)$$

\Rightarrow lineare Dgl. für $v(x)$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} + (1-m)p(x)v(x) = (1-m)q(x)}$$

gew., inhomogen,
1st. Ord., nicht-konst.

Beispiel

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + xy(x) = xy^2}$$

d.h. $m=2$

Substitution: $v(x) = y^{1-2} = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \frac{dv}{dx}$$

einsetzen in Dgl.:

$$-y^2 \frac{dv}{dx} + xy = xy^2 \quad | \cdot y^{-2}$$

$$-\frac{dv}{dx} + x \cdot \underbrace{\frac{1}{y}}_{=v} = x$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} - xv(x) = -x}$$

lineare Dgl. für $v(x)$

Zunächst: Lösung der homogenen Dgl.

105

$$\frac{dv}{dx} - xv(x) = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = xv \quad ; \quad \frac{dv}{v} = x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x dx \quad ; \quad \ln v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$v(x) = A e^{\frac{1}{2} x^2} \quad \leftarrow \text{allgemeine Lösung der homogenen Dgl.}$$

jetzt: Ansatz für die Lösung der inhomogenen Dgl.

$$v(x) = e^{\frac{1}{2} x^2} u(x) \quad \text{einsetzen in } \frac{dv}{dx} - xv(x) = -x$$

$$\frac{dv}{dx} = e^{\frac{1}{2} x^2} \frac{du}{dx} + u(x) \times e^{\frac{1}{2} x^2}$$

einsetzen ergibt:

$$e^{\frac{1}{2} x^2} \frac{du}{dx} + \underbrace{u(x) \times e^{\frac{1}{2} x^2} - x e^{\frac{1}{2} x^2} u(x)}_{=0} = -x$$

$$\frac{du}{dx} = \underbrace{-x e^{-\frac{1}{2} x^2}}_{\text{hat die Stammfunktion } e^{-\frac{1}{2} x^2}}$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{-\frac{1}{2} x^2} + c$$

daraus folgt für die Lösung der inhomogenen Dgl

$$v(x) = e^{\frac{1}{2} x^2} (e^{-\frac{1}{2} x^2} + c) = 1 + c e^{\frac{1}{2} x^2}$$

mit $v(x) = \frac{1}{y(x)}$ folgt

$$y(x) = \frac{1}{1 + c e^{\frac{1}{2} x^2}}$$

IV.3.2 zweite Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

mit $p(x), q(x)$ nicht singular bei $x=0$ (später z.B. $p(x) = \frac{1}{x}$)

Frobenius-Methode: Annahme \rightarrow die Lösung $y(x)$ lässt sich als eine Potenzreihe um $x=0$ darstellen

$$\text{d.h. } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

○ Lösung der Dgl. $\hat{=}$ Bestimmung der Koeffizienten c_n

Beispiel:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{zur Illustration!}$$

hier: $p(x) = 0$ $q(x) = \omega^2$

\Rightarrow gew. Dgl. mit konstanten Koeff.

allgemeine Lösung $y(x) = A_1 e^{i\omega x} + A_2 e^{-i\omega x}$

○ jetzt mit Frobenius-Methode

$$\text{Ansatz: } y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

einsetzen in die Dgl.:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

läßt sich schreiben als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (*)$$

mit: $a_0 = c_2 \cdot 2(2-1) + \omega^2 c_0 = 2c_2 + \omega^2 c_0 \quad (1)$

$$a_1 = c_3 \cdot 3(3-1) + \omega^2 c_1 = 6c_3 + \omega^2 c_1 \quad (2)$$

⋮

$$a_n = c_{n+2} (n+2)(n+1) + \omega^2 c_n \quad (n)$$

Gl. (*) muß erfüllt sein für alle x

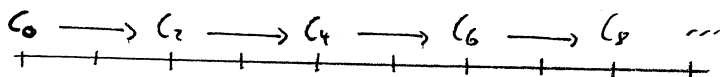
$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus (1) folgt: } c_2 = -\frac{\omega^2}{2} c_0 \\ \text{(2): } c_3 = -\frac{\omega^2}{6} c_1 \end{array} \right\} c_0, c_1 \text{ unbestimmt}$$

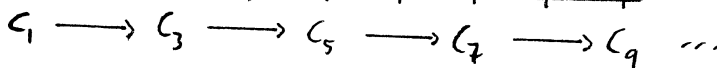
Sonst: Rekursionsrelation: Gl. (n) verknüpft c_{n+2} mit c_n

$$c_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)} c_n$$

gerade



ungerade



wie bekommt man aus der Rekursionsrelation eine allgemeine Formel für die c_n ?

Es c_n für gerade n : $c_2 = (-1)^{\frac{2}{2}} \omega^2 \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot c_0$

$$c_4 = -\frac{\omega^2}{4 \cdot 3} c_2 =$$

$$= (-1)^{\frac{4}{2}} \omega^4 \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} C_0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \omega^n \frac{1}{n!} C_0} \quad \text{für gerade } n$$

ii, C_n für ungerade n : $C_1 = C_1$

$$C_3 = (-1)^{\frac{3-1}{2}} \omega^{3-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_1$$

$$C_5 = -\frac{\omega^2}{5 \cdot 4} \cdot C_3$$

$$= (-1)^{\frac{5-1}{2}} \omega^{5-1} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \omega^{n-1} \frac{1}{n!} C_1}$$

die Lösung hat also folgende Form:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} C_n x^n + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} C_n x^n$$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n!} \underbrace{\omega^n x^n}_{=(\omega x)^n} C_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{1}{n!} \underbrace{\omega^{n-1} x^n}_{=(\omega x)^n \frac{1}{\omega}} C_1$$

$$= C_0 \sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} \frac{1}{(2n')!} (\omega x)^{2n'} + \frac{C_1}{\omega} \sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} \frac{1}{(2n'+1)!} (\omega x)^{2n'+1}$$

$$\downarrow$$

$$n' = \frac{n}{2}$$

$$n' = \frac{n-1}{2}$$

$$n = 2n'+1$$

$$= \underbrace{C_0}_{= C} \cos(\omega x) + \underbrace{\frac{C_1}{\omega}}_{= D} \sin(\omega x)$$

\Rightarrow allgemeine Lösung der Dgl. mit Hilfe der Frobenius-Methode:

$$y(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$$

V Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

V.1. Fourier-Reihe

$\hat{=}$ Entwicklung, bzw. Darstellung einer Funktion als Reihe mit \sin & \cos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

↳ Faktor $\frac{1}{2}$ wird später klar

läßt sich auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\underbrace{\cos(-n)x}_{=\cos nx} + i \underbrace{\sin(-n)x}_{=-\sin nx} \right)$$

+ c_0

$$= \underbrace{c_0}_{=\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(c_n + c_{-n})}_{=a_n} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} i \underbrace{(c_n - c_{-n})}_{=b_n} \sin nx$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$n=1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

Berechnung der a_n, b_n für eine gegebene Funktion $f(x)$

Behauptung:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n=0,1,2,\dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n=1,2,\dots$$

Beweis durch Einsetzen der Fourier-Reihe

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'} \cos n'x + \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} \sin n'x \right] \cos nx \, dx$$
$$= a_0 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx}_{= \delta_{n,0}} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n'x \cos nx \, dx$$
$$+ \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n'x \cos nx \, dx$$

analog

$$b_n = a_0 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx}_{= 0} + \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n'x \sin nx \, dx$$
$$+ \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n'x \sin nx \, dx$$

es muß also gelten:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n'x \cos nx \, dx = \delta_{nn'} \quad \begin{array}{l} n' \neq 0 \\ n=0,1,2,\dots \end{array}$$
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n'x \sin nx \, dx = \delta_{nn'} \quad \begin{array}{l} n' \neq 0 \\ n=0,1,2,\dots \end{array}$$
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n'x \cos nx \, dx = 0 \quad \text{für alle } n, n'$$

Beweis von $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n'x \cos nx \, dx = \delta_{nn'}$ $n, n' \geq 0$ ($n' \neq 0$)¹¹²

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{in'x} + e^{-in'x})(e^{inx} + e^{-inx}) \, dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i(n'+n)x} + e^{i(-n'+n)x} + e^{i(n'-n)x} + e^{i(-n'-n)x}) \, dx = \dots$$

betrachte $\int_0^{2\pi} e^{imx} \, dx = 2\pi \delta_{m,0}$

Fallunterscheidung: $m=0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{i0x} \, dx = 2\pi$

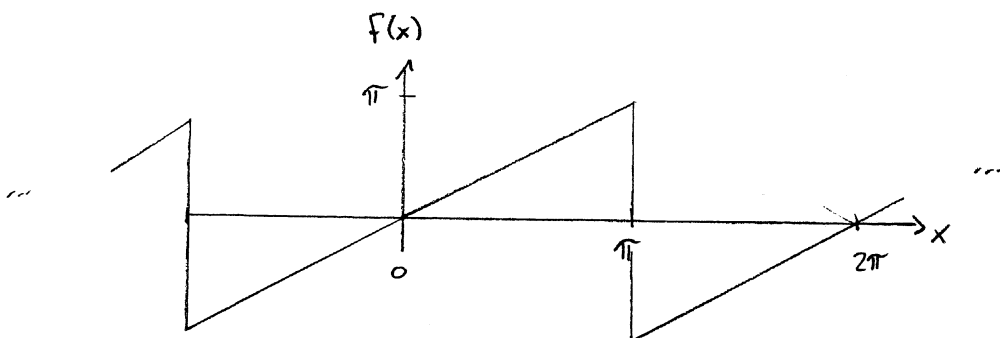
$$m \neq 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{imx} \, dx = \frac{1}{im} \left(\underbrace{e^{2\pi im}}_{=1} - 1 \right) = 0$$

$\dots =$ für $n=n'$: $\frac{1}{4\pi} (2\pi + 2\pi) = 1$

$n \neq n'$: 0 ✓

Beispiel: Darstellung der Sägezahn-Welle als Fourier-Reihe

Gegeben: $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ x - 2\pi & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ & $f(x+2\pi) = f(x)$



Berechnung der a_n, b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$n=0: \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

$$n > 0: \quad a_n = 0 \quad \text{wg. Symmetrie} \quad \cos nx = \cos(-nx) \quad !$$

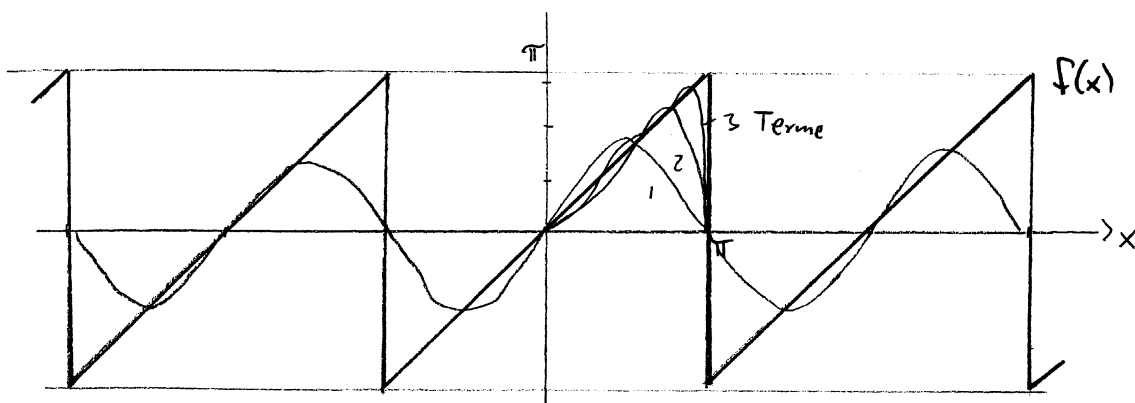
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \quad (\text{Formelsammlung})$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{n^2} \sin n\pi}_{=0} - \frac{1}{n^2} \underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{n} \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} + \frac{-\pi}{n} \underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

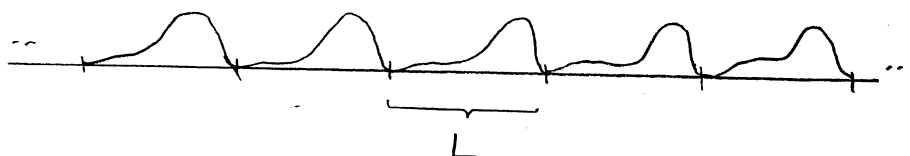
$$= 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right]$$



allgemeine Eigenschaften der Fourier-Reihe

Periodizität: es lassen sich lediglich periodische Funktionen

$$f(x) = f(x+L) \quad \text{für jedes } x, \text{ darstellen}$$



denn: $\cos(nx) = \cos(n(x+2\pi))$

$$\sin(nx) = \sin(n(x+2\pi))$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x+2\pi) \quad L = 2\pi$$

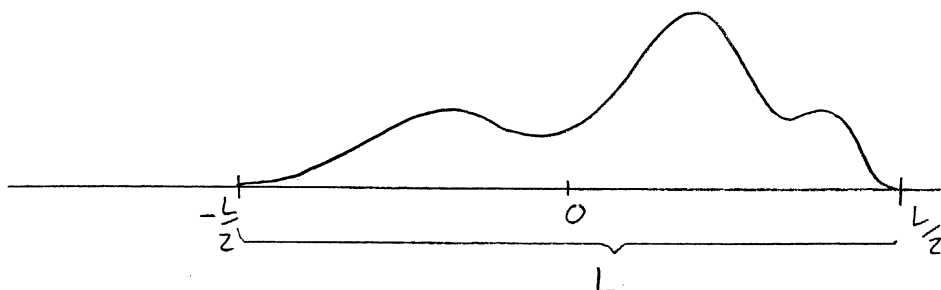
aber: keine Einschränkung auf $L = 2\pi$!

sonst: definiere $g(x) = f\left(\frac{xL}{2\pi}\right)$ für $L \neq 2\pi$

für $g(x)$ gilt dann $g(x) = g(x+2\pi)$ denn

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{(x+2\pi)L}{2\pi}\right) = f\left(\frac{xL}{2\pi} + L\right) \stackrel{!}{=} f\left(\frac{xL}{2\pi}\right) = g(x)$$

Falls $f(x)$ nicht periodisch, z.B.

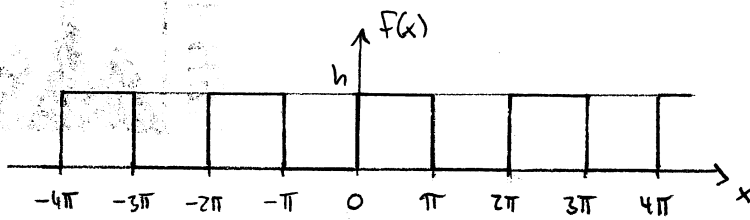


- \Rightarrow
- berechne a_n, b_n für $g(x) = f\left(\frac{xL}{2\pi}\right)$
 - betrachte Fourier-Reihe nur im Intervall $[-\pi, \pi]$
 L, L

Weiteres Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : -\pi < x < 0 \\ h & : 0 < x < \pi \end{cases}$$

115



Berechnung der a_n, b_n :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \pi \cdot h = h$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos nx dx = 0 \quad n=1, 2, \dots$$

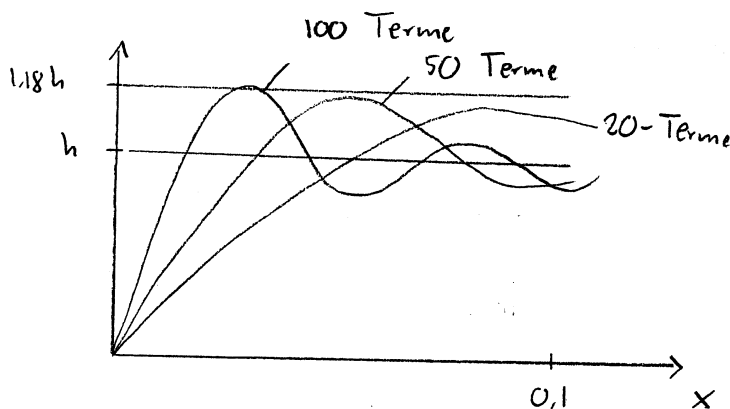
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \sin nx dx = \frac{h}{\pi} \frac{-1}{n} [\cos nx]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{h}{n\pi} (1 - \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n}) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2h}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

\Rightarrow

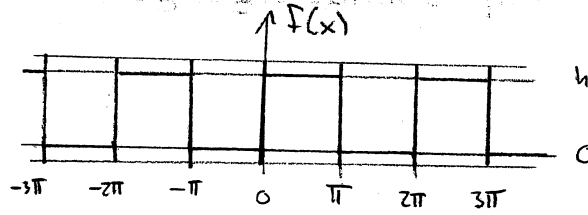
$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Das Gibbs-Phänomen

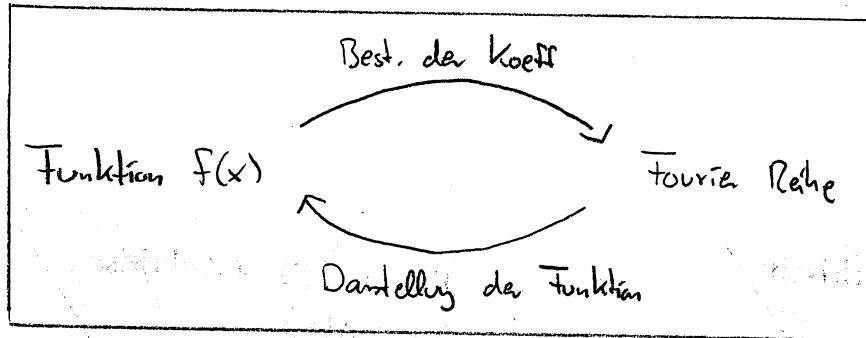


\Rightarrow Überschwingen (ca 18%) bleibt selbst dann erhalten, wenn beliebig viele Terme mitgenommen werden

d.h. die Fouriër-Reihe ergibt:



Zusammenfassung



Vergleich mit Taylor-Reihe:

TR: geht nur für stetige Funktionen

FR: auch für nicht-stetige

FR: beschreibt immer periodische Funktionen

TR: periodische Funktionen möglich

allgemein : Integral-Transformationen→ betrachte Paare von Funktionen $g(\alpha), f(t)$ verknüpft durch

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t) k(\alpha, t) dt$$

↓
Kern der Integraltransformationd.h. Abbildung $f(t) \xrightarrow{k} g(\alpha)$ Beispiele:

Fourier-Transformation

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$$

d.h. $k(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha t}$

Fourier-Sinus-Transformation

$k(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \alpha t$

- Kosinus -

$k(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \alpha t$

Laplace-Transformation

$k(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$

Linearität

sei $\bar{F}(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$

$\Rightarrow \bar{g}(\alpha) = c_1 g_1(\alpha) + c_2 g_2(\alpha)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\alpha) &= \int_a^b \bar{F}(t) k(\alpha, t) dt \\ &= \int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] k(\alpha, t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty}$$

$$\int_0^{\infty}$$

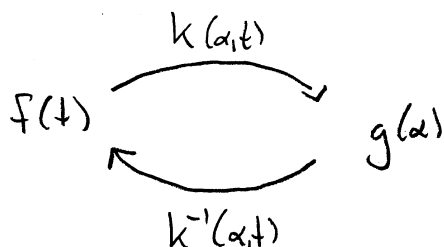
$$= c_1 \underbrace{\int_a^b f_1(t) k(\alpha, t) dt}_{= g_1(\alpha)} + c_2 \underbrace{\int_a^b f_2(t) k(\alpha, t) dt}_{= g_2(\alpha)} \quad \checkmark$$

inverse Integral-Transformation (allgemein)

gegeben: $k(\alpha, t)$, so daß $g(\alpha) = \int f(t) k(\alpha, t) dt$

gesucht: $k^{-1}(\alpha, t)$, so daß $f(t) = \int g(\alpha) k^{-1}(\alpha, t) d\alpha$

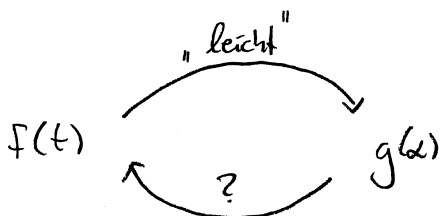
↳ Kern der inversen Transformation



Achtung: Bestimmung von $k^{-1}(\alpha, t)$ oft gar nicht möglich

Beispiel:

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t) \underbrace{\frac{e^{-\alpha t}}{1 + e^{-\beta t}}}_{k_\beta(\alpha, t)} dt$$



"Unsinniges" Beispiel

$$k(\alpha, t) = 1$$

d.h. $g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = g$

$$g \xrightarrow{?} f(t)$$

Inverse Transformation der Fourier-Transformation

$$\text{sei } g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$k(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}$$

Behauptung: $k^{-1}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}$

$$\text{d.h. } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Beweis: betrachte die Fourierreihe der Funktion $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in x \frac{\pi}{L}}$$

$$\text{mit } f(x+2L) = f(x)$$

\Rightarrow für die Koeffizienten c_n :

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{+int \frac{\pi}{L}} dt$$

Einsetzen ergibt

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{2L} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-in x \frac{\pi}{L}} \int_{-L}^L f(t) e^{+int \frac{\pi}{L}} dt$$

Schreibe $\frac{n\pi}{L} = \omega$ $\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$ und betrachte den Limes $L \rightarrow \infty$

dann folgt für $\int_{-L}^L f(t) dt$ endlich:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \Delta\omega e^{-i\omega x} \int_{-L}^L f(t) e^{+i\omega t} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{+i\omega t} dt}_{= (\text{siehe oben}) \sqrt{2\pi} g(\omega)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega x} \quad \checkmark$$

\Rightarrow Darstellung der δ -Funktion

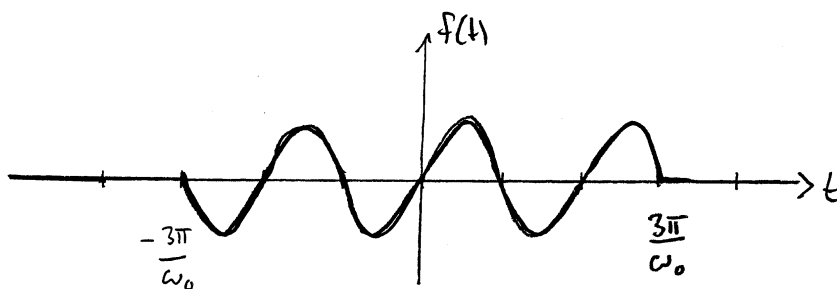
schreibe

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-x)}}_{= \delta(t-x)}$$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}}$$

Beispiel: Fourier-Transformation eines endlichen Wellen-Zuges

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$$



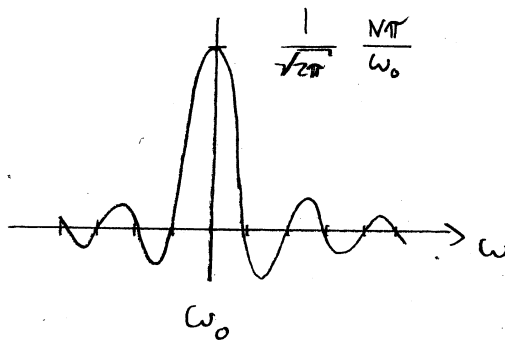
(N=3)

verwende: Fourier-Sinus-Transformation

121

$$\begin{aligned} g_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{M/\omega_0} \underbrace{\sin \omega_0 t \sin \omega t}_{=} \, dt \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\omega_0 - \omega)t - \cos(\omega_0 + \omega)t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{2(\omega_0 - \omega)} \left[\sin(\omega_0 - \omega)t \right]_0^{M/\omega_0} - \frac{1}{2(\omega_0 + \omega)} \left[\sin(\omega_0 + \omega)t \right]_0^{M/\omega_0} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega) \frac{M\pi}{\omega_0}]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega) \frac{M\pi}{\omega_0}]}{2(\omega_0 + \omega)} \right] \end{aligned}$$

betrachte nur den ersten Term

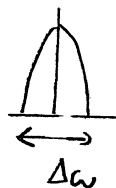


Nullstellen bei $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} N\pi = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{m}{N}$$

→ Maß für die Breite des Impulses im "Frequenzraum"

$$\Delta\omega = 2 \frac{\omega_0}{N}$$



→ Breite des Impulses in der Zeit $\Delta T = 2 \frac{M\pi}{\omega_0}$

=> Klassische Unschärfebeziehung

$$\Delta\omega \cdot \Delta T = 4\pi$$

für $\Delta T \rightarrow \infty$ folgt also $\Delta\omega \rightarrow 0$

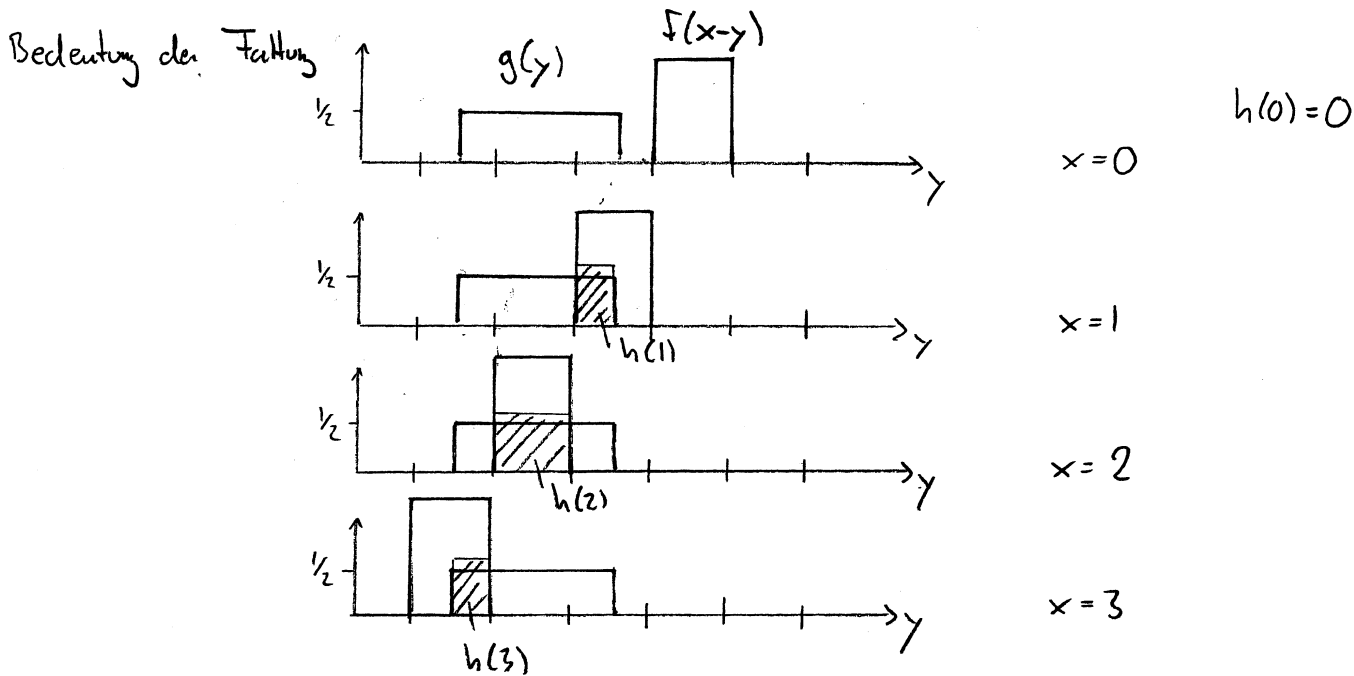
Faltungstheorem

gegeben: Funktionen $f(x), g(x)$

mit den Fourier-Transformierten $F(\omega), G(\omega)$

Def.: Faltung zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$h(x) \equiv f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy$$



Faltungstheorem: Herleitung

schreibe
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t)} e^{-it(x-y)} dt dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t)} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ity} dy \right]}_{= G(t)} e^{-itx} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t)} G(t) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} h(x)$$

sei $H(t)$ die Fouriertransformierte von $h(x)$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-itx} dt$$

$$\Rightarrow H(t) = \overline{F(t)} G(t)$$

in Worten:

die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen f, g ist gleich dem Produkt der jeweiligen Fourier-Transformierten

VI Differentiation und Integration in \mathbb{R}^n

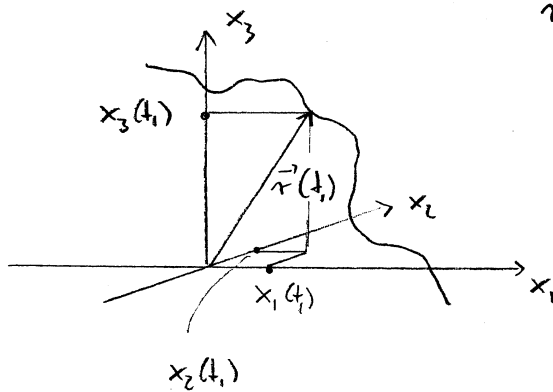
VI.1 Vektorwertige Funktionen

Definition: die Abbildung $t \rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

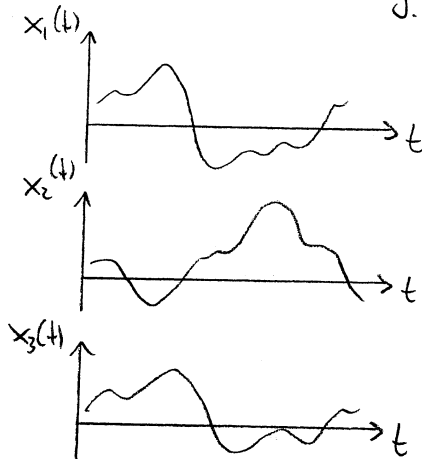
heißt vektorwertige Funktion

z.B. Bahnkurve eines Teilchens: t = Zeit

$\vec{r}(t)$ = Ort zur Zeit t



Komponenten von $\vec{r}(t)$: 3 'gewöhnliche' Funktionen $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$



Parameterdarstellung von Raumkurven

einige Beispiele

1. Bewegung eines Körpers auf einer Geraden

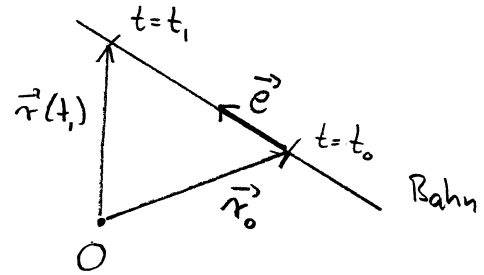
→ $\vec{r}(t)$: Lage des Schwerpunkts zur Zeit t

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{e} v (t - t_0)$$

\vec{e} : Einheitsvektor in Richtung der Bewegung

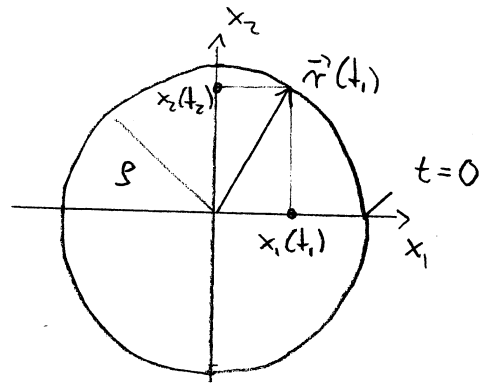
v : Geschwindigkeit (später $v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$)

\vec{r}_0 : Lage zur Zeit $t = t_0$



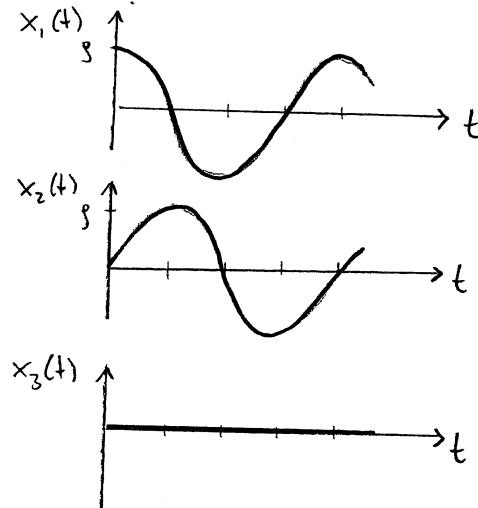
2. Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = \rho \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$



Darstellung in „Polarkoordinaten“

Komponenten von $\vec{r}(t)$:



Ableitung vektorwertiger Funktionen

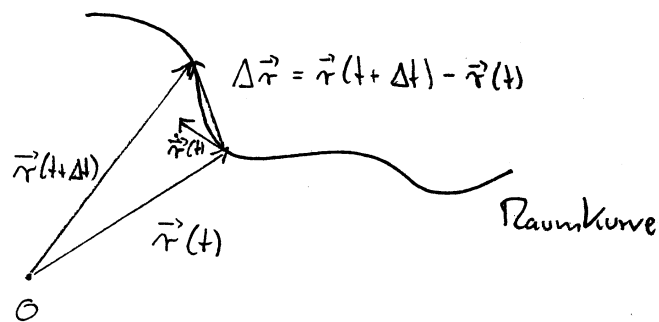
Def.:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ ist ebenfalls ein Vektor}$$

126

graphisch:



$\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt in tangentialer Richtung

Beispiele:

$$1. \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{e} v (t - t_0) \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

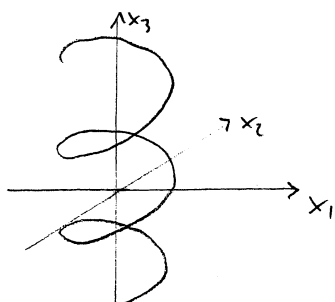
$$= \begin{pmatrix} r_{0,1} + e_1 v (t - t_0) \\ r_{0,2} + e_2 v (t - t_0) \\ r_{0,3} + e_3 v (t - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} e_1 v \\ e_2 v \\ e_3 v \end{pmatrix} = v \vec{e} \quad ; \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = v \underbrace{|\vec{e}|}_{=1}$$

\uparrow
 $v > 0$

2. Schraubensbahn

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} g \cos \omega t \\ g \sin \omega t \\ v_0 t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -g\omega \sin \omega t \\ g\omega \cos \omega t \\ v_0 \end{pmatrix}$$



$$v(t) = \left| \dot{\vec{r}}(t) \right| = \sqrt{g^2 \omega^2 (\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_{=1}) + v_0^2}$$

$$= \sqrt{g^2 \omega^2 + v_0^2}$$

Einige Rechenregeln für die Vektordifferentiation

127

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

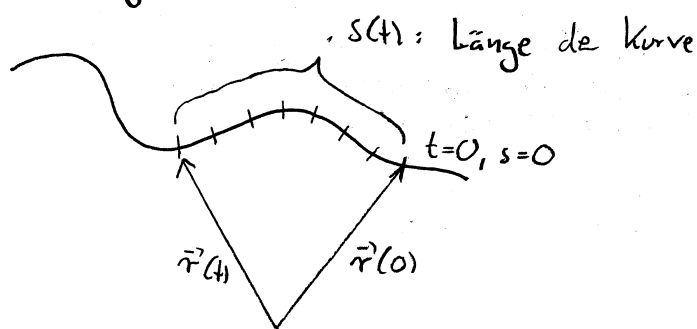
$$\frac{d}{dt} (f(t) \vec{a}(t)) = f'(t) \vec{a}(t) + f(t) \frac{d\vec{a}}{dt}$$

↓ reelle, nicht vektorwertige Funktion

Beweis: Komponentenweise

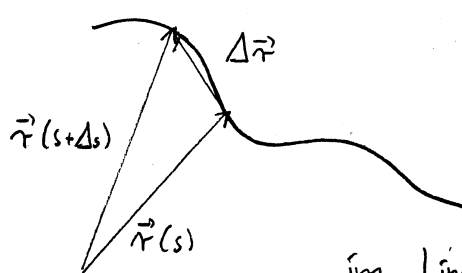
Beschreibung von Raumkurven

Def.: Bogenlänge s einer Raumkurve



[Achtung: \vec{r} jetzt als Funktion von s]

Def.: $\vec{t} := \frac{d\vec{r}}{ds}$ "Tangenten-Einheitsvektor"



$$\frac{d\vec{r}}{ds} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$$

im Limes $\Delta s \rightarrow 0$ gilt $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$

$$\Rightarrow |\vec{t}| = 1$$

Bestimmung der Bogenlänge $s(t)$ für gegebenes $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$$

[zwei verschiedene Funktionen!]

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{r}(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \underbrace{\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|}_{=1} \left| \frac{ds}{dt} \right| \Rightarrow \boxed{\left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|}$$

Beispiel: Bogenlänge entlang der Schraubenbahn

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ 4t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \sqrt{9(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1) + 16} = 5$$

$$\Rightarrow \left| \frac{ds}{dt} \right| = 5 \Rightarrow s(t) = \pm (5t + \text{const})$$

\rightarrow wähle + als Vorzeichen

Berechnung des Tangenten-Einheitsvektors:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{siehe oben}}{=} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \sin \frac{s}{5} \\ 3 \cos \frac{s}{5} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{t}(t)} \quad \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \sin \frac{s}{5} \\ 3 \cos \frac{s}{5} \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{t}(s)}$

siehe const = 0

[auch zwei versch. Funkt.]

Def.: Krümmung

$\vec{t}(s)$ ändert sich entlang der Bahn $\vec{r}(s)$

Stärke dieser Änderung = Maß für die Krümmung κ

$$\boxed{\kappa = \left| \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \right|}$$

Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

129

Beispiel: Kreisbahn mit Radius r

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = r = \left| \frac{ds}{dt} \right| \Rightarrow \text{wähle } s(t) = rt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(s) = r \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{r} \\ \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{r} \\ \cos \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{r} \\ -\sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

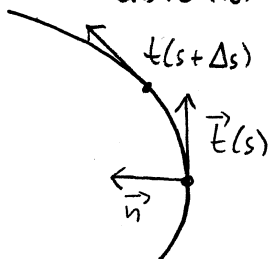
$$\Rightarrow \kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{1}{r} \Rightarrow \rho = r, \text{ wie zu erwarten}$$

jetzt: Richtung der Änderung der Tangente

Def.: Hauptnormale

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{t}}{ds}$$

→ Einheitsvektor in der Kurvenebene \perp zu \vec{t} !



Beweis von $\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0$

130

schreibe $\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) = |\vec{t}(s)|^2 = 1$

$$\frac{d}{ds} (\vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s)) = 0$$

Produktregel

$$= \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 2 \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t}$$

$$= 2 \times \vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = 0$$

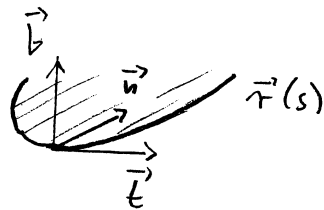
$$\Rightarrow \vec{n}(s) \perp \vec{t}(s)$$

\uparrow $x \neq 0$

Def.:

Binormale

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$



$\Rightarrow (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ bilden das
„begleitende Dreibein“

Def.:

Torsion der Raumkurve τ

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

d.h. $\frac{d\vec{b}}{ds} \parallel \vec{n}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{t} \times \vec{n}) = \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds}}_{= \times \underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{=0}} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \end{aligned}$$

d.h. $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t}$; $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$; da \vec{b} Einheitsvektor

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} \parallel \vec{n}$$

VI.2 Felder

• Skalare Felder : Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

physikalische Beispiele : Temperaturverteilung $T(\vec{r})$

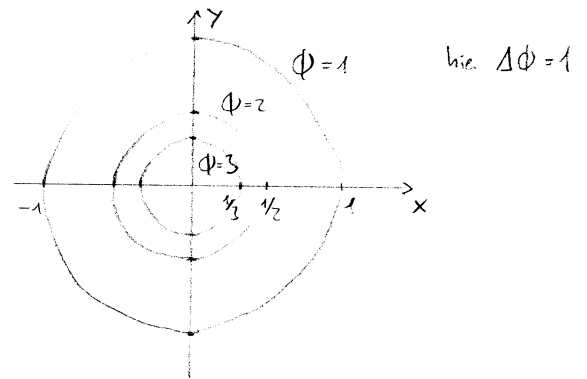
Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, Massendichte $\rho(\vec{r})$

z.B. $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Veranschaulichung für $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; dh. Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

→ Höhenlinien : Linien mit konstanten $\Phi = \Phi_n$

wähle z.B. $\Phi_n = n \cdot \Delta\Phi$

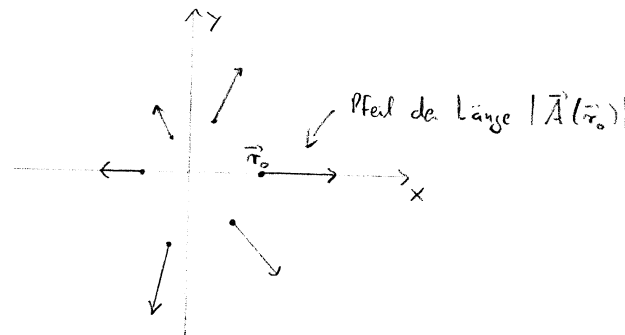


• Vektor-Felder : Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

physikalische Beispiele : Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r}) \rightarrow$ z.B. Gravitationsfeld der Erde

elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$, magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$

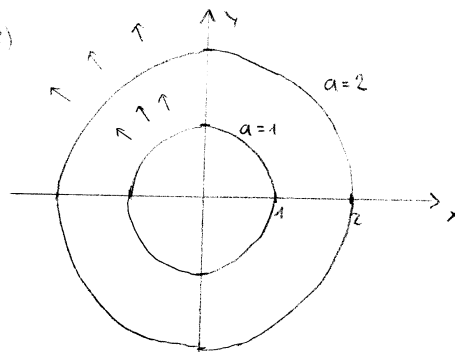
z.B. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$



betrachte das skalare Feld $a(\vec{r}) = |\vec{A}(\vec{r})| = |\vec{r}| = r$

Veranschaulichung : Höhenlinien von $a(\vec{r})$

+ Pfeile in Richtung $\vec{A}(\vec{r})$



partielle Ableitungen

sei $A(\vec{r})$ ein Feld (skalar oder Vektor), $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Def.:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1} [A(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - A(x_1, x_2, x_3)]$$

analog: $\frac{\partial A}{\partial x_2}, \frac{\partial A}{\partial x_3}$

Beispiele: • sei $A(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_i} = a_i$$

• sei $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = \vec{e}_i$$

höhere Ableitungen

z.B. $\frac{\partial^n A}{\partial x_i^n}$

gemischt: $\frac{\partial^n A}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$

z.B. $\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \right)$

es gilt:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_i}$$

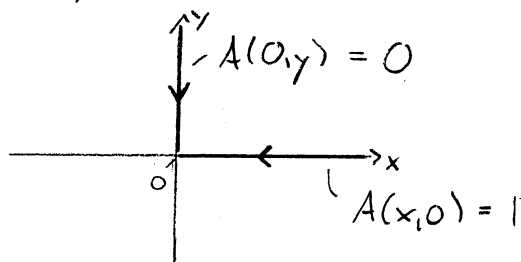
falls partielle Ableitungen stetig

Def.:

$A(\vec{r})$ heißt stetig an der Stelle \vec{r}_0 , wenn

$$|A(\vec{r}) - A(\vec{r}_0)| \rightarrow 0 \text{ für beliebige Wege } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$$

$A(\vec{r}) = \frac{x}{x+y}$ ist nicht stetig bei $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



VI.3 Gradient, Divergenz, Rotation

der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla)

Def.: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

hat als Komponenten keine Zahlen, sondern Differentiationsbefehle

Anwendung von $\vec{\nabla}$ auf Felder

Gradient	:	$\text{grad } \psi \equiv \vec{\nabla} \psi$	} \vec{A} : Vektor-Feld
Divergenz	:	$\text{div } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	
Rotation	:	$\text{rot } \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A}$	

Gradient

Def.: sei $\psi(\vec{r})$ ein skalares Feld

$\Rightarrow \text{grad } \psi \equiv \vec{\nabla} \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ ergibt Vektor "Gradientenfeld"

Beispiele:

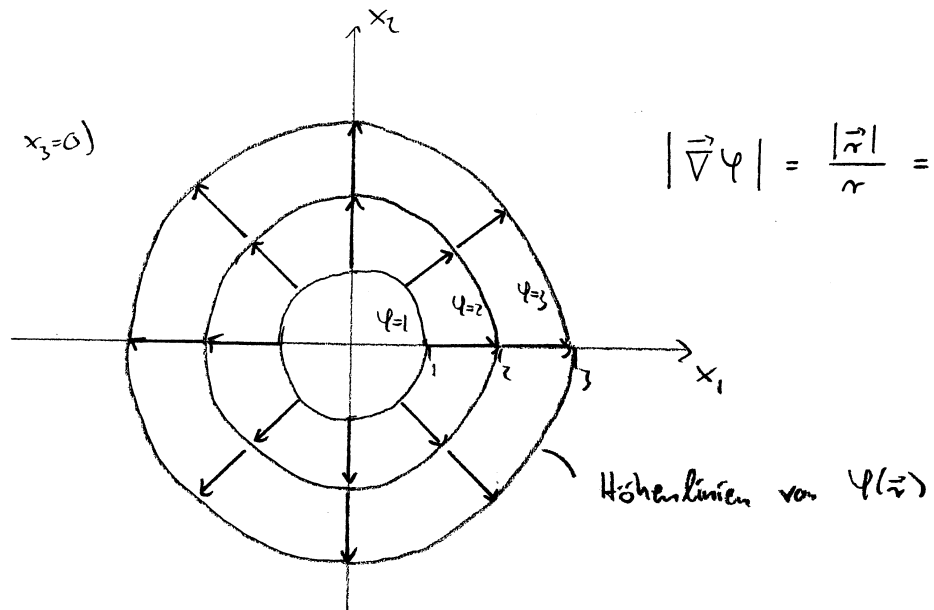
• $\psi = a = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \psi = \vec{0}$

$$\psi(\vec{r}) = r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Veranschaulichung:
(eigentlich Schnitt mit $x_3=0$)



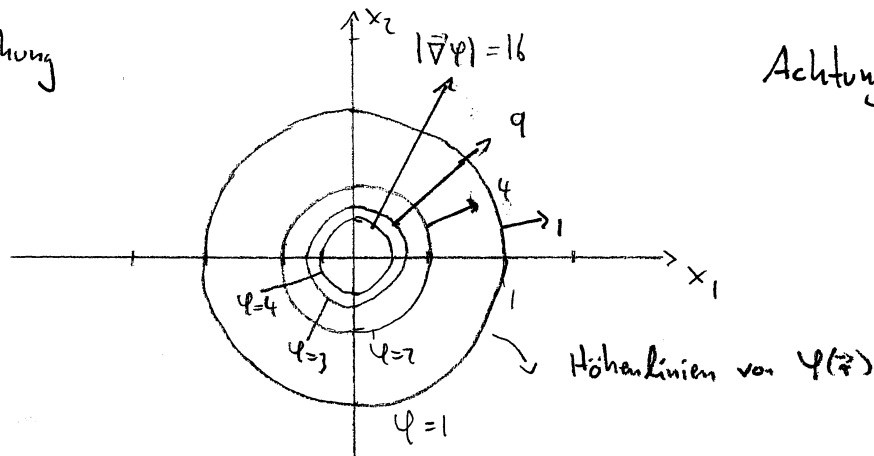
Gradientenfeld steht \perp auf den Höhenlinien

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

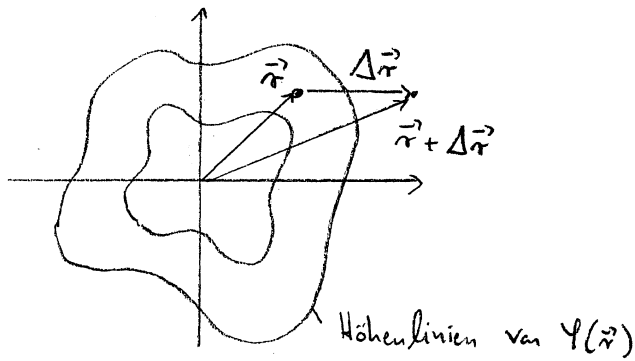
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \psi = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad |\vec{\nabla} \psi| = \frac{|\vec{r}|}{r^3} = \frac{1}{r^2} = \psi^2$$

Veranschaulichung



Änderung von $\varphi(\vec{r})$ in beliebige Richtungen



$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) =$$

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\varphi \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix}}_{\text{im Limes } \Delta x_1 \rightarrow 0} + \underbrace{\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix}}_{\text{im Limes } \Delta x_2 \rightarrow 0}$$

$$= \Delta x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

im Limes $\Delta x_1 \rightarrow 0$

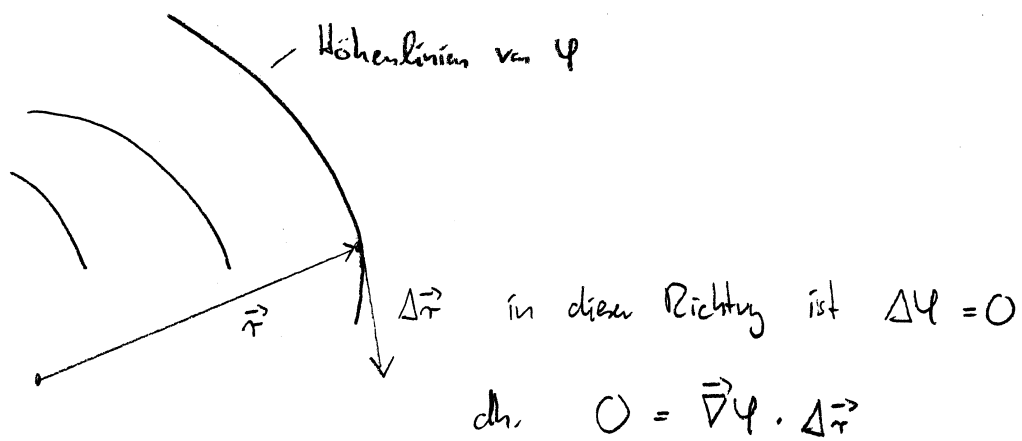
$$= \Delta x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

$$+ \underbrace{\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + \Delta x_3 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{im Limes } \Delta x_3 \rightarrow 0}$$

$$= \Delta x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot \Delta\vec{r}}$$



\Rightarrow

Richtung von $\vec{\nabla}\varphi$ ist stets senkrecht zu den
Flächen mit $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$

Divergenz

Definition: gegeben sei Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

= Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$
bzw. "Quellenfeld" von $\vec{A}(\vec{r})$

Beispiele und Rechenregeln:

$$\bullet \vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\bullet \vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$$

$$\bullet \vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{B} \times \vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} B_2 x_3 - x_2 B_3 \\ B_3 x_1 - x_3 B_1 \\ B_1 x_2 - x_1 B_2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \operatorname{div} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B}$$

$$\bullet \operatorname{div} (\alpha \vec{A}) = \alpha \operatorname{div} \vec{A} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \operatorname{div} (\psi \vec{A}) = \psi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad \psi = \text{skalares Feld}$$

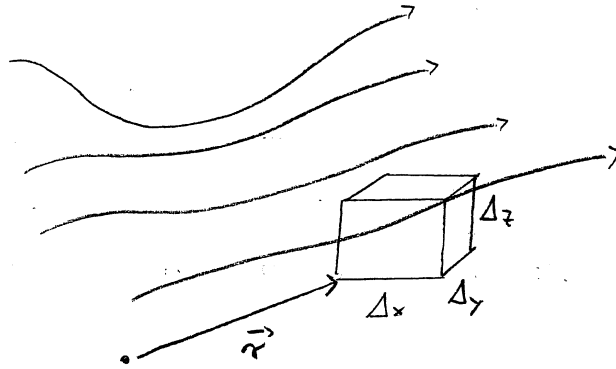
Laplaceoperator

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Divergenz: Interpretation als lokale Quellstärke

Beispiel: Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ = Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit



$$\text{Teilchenstromdichte} = \vec{j}(\vec{r}) = n(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$$

↓ Teilchendichte

$$\text{Teilchendichte} \quad n(\vec{r}) = \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

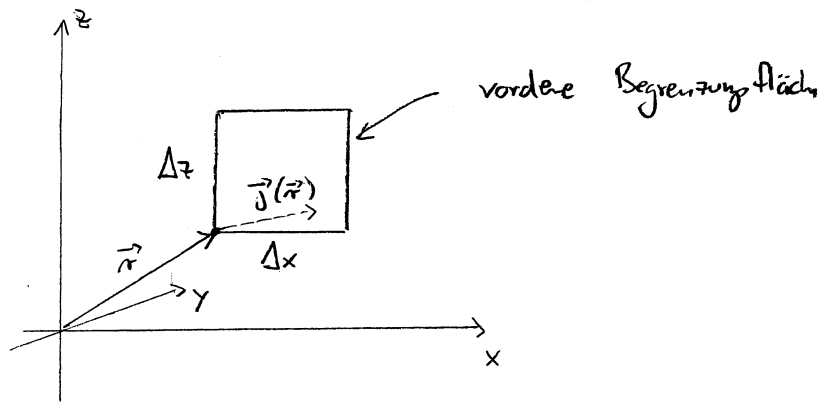
$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

ΔN : Zahl der Teilchen im Volumen ΔV

zeitliche Änderung der Teilchendichte

$$\text{es gilt} \quad \frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

Beweis: → Strömungsbilanz für den Quader



Berechne die Zahl der in der Zeit Δt durch diese Fläche durchströmenden Teilchen; $\Delta x, \Delta z$ klein $\Rightarrow \vec{j}$ auf der Fläche konstant.

$$\Delta N_{y,1} = n \cdot \Delta V$$

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta y = v_y \cdot \Delta t \quad (\text{d.h. spezielle Wahl von } \Delta t)$$

$$= n v_y(\vec{r}) \Delta t \Delta x \Delta z$$

Zahl der durch die hinteren Begrenzungsfläche ausströmenden Teilchen

$$\Delta N_{y,2} = n v_y(x, y + \Delta y, z) \Delta t \Delta x \Delta z$$

\Rightarrow Änderung der Teilchendichte

$$\frac{1}{\Delta V} (\Delta N_{y,1} - \Delta N_{y,2}) = n \Delta t \underbrace{\frac{1}{\Delta y} (v_y(x, y, z) - v_y(x, y + \Delta y, z))}_{\rightarrow -\frac{\partial}{\partial y} v_y(x, y, z)}$$

$$= -\Delta t \frac{\partial}{\partial y} j_y(x, y, z)$$

Gesamtbilanz (alle 6 Grenzflächen)

$$-\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} j_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} j_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} j_z(\vec{r}) \right) = -\Delta t \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})}$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ ist das Quellenfeld
des Vektorfeldes \vec{j}

Rotation

Definition: gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

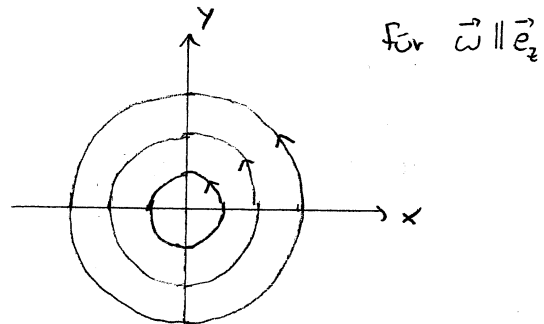
Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$

"Wirbelfeld" von $\vec{A}(\vec{r})$

Rotation: Interpretation als lokale Wirbelstärke

betrachte Strömungsfeld eines ^{homogenen} Wirbels

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Umlaufzeit:

$$|\vec{v}(\vec{r})| = \omega r \quad (\text{für } z=0)$$

$$\text{Umfang} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \text{Drehfrequenz} = \frac{\omega}{2\pi}$$

ω : ^{Maß für die} Wirbelstärke

Berechne: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ für $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}$$

$\Rightarrow \text{rot } \vec{r}(\vec{r})$: Wirbelfeld von $\vec{r}(\vec{r})$

Eigenschaften und Rechenregeln

- $\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$
- $\text{rot}(\alpha \vec{A}) = \alpha \text{rot } \vec{A} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\text{rot}(\psi \vec{A}) = \psi \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } \psi) \times \vec{A} \quad \psi = \text{skalares Feld}$

Gradientenfelder sind stets wirbelfrei

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = \vec{0}$$

Beweis:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Wirbelfelder sind stets quellenfrei

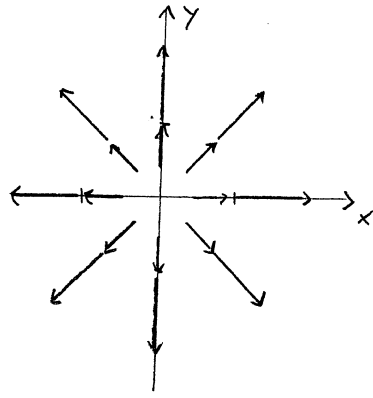
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Beispiele (Rotation)

• $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$



⇒ keine Wirbel

142

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

oder: $\vec{r} = \vec{\nabla} \psi$ mit $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{2} r^2$ (siehe Übungen (I.3))

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = \vec{0}$$

• $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \psi$ mit $\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$$

allgemein: $\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{f(r) \vec{r}}_{\text{keine Wirbel}} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$

Beweis über $\vec{\nabla} \times (f(r) \vec{r}) = f(r) \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{r}}_{=0} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{r}$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \dots = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$$

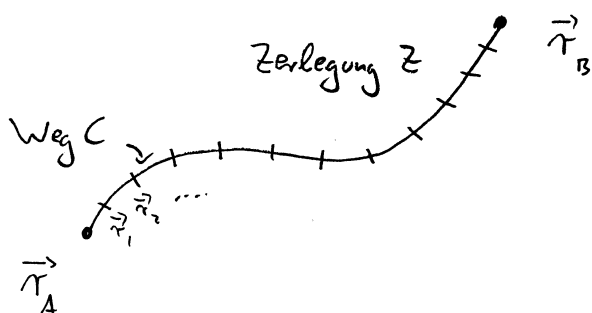
$$\Rightarrow (\vec{\nabla} f) \times \vec{r} = \frac{f'(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r} = f'(r)$$

ok

jetzt: Kurvenintegral (auch Linienintegral) über das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des Weges C von \vec{r}_a bis \vec{r}_b

$$\int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$



$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

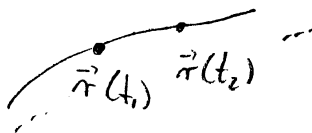
Berechnung von Kurvenintegralen

Falls die Kurve C in Parameterdarstellung vorliegt d.h.

$$C \hat{=} \vec{r}(t)$$

schreibe: $\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} \Delta t_i$

mit $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$



$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i} = \frac{d\vec{r}}{dt} (= \vec{v}(t))$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt$$

Beispiel:

gegeben $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9yz \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$

144

gesucht:

$$\int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

mit $\vec{r}_A = (0, 0, 0)$

$\vec{r}_B = (1, 1, 1)$

C : Gerade von \vec{r}_A nach \vec{r}_B

Parameterdarstellung der Kurve C :

$$\vec{r} = (t, t, t) \quad \text{mit } t_A = 0; t_B = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 1, 1)$$

$$\int_{\dots} = \int_0^1 (3t^2 + 2t, -9t^2, 8t^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

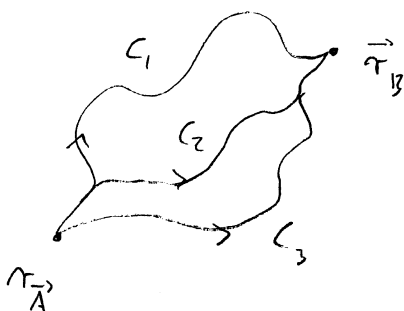
$$= 8t^3 - 6t^2 + 2t$$

$$= \frac{8}{4} - \frac{6}{3} + 1 = 1$$

Kurvenintegrale über Gradientenfelder

Frage:

unter welchen Bedingungen hängt $\int_{\vec{r}_A, C}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ nur von \vec{r}_A, \vec{r}_B ab und nicht von der Form des Weges C ?



Behauptung: $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg, wenn ein skalares Feld Φ existiert mit $\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi$

↳ „ \vec{A} ist als Gradientenfeld darstellbar“

Beweis:

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left. \vec{\nabla} \Phi \right|_{\vec{r}_i} \cdot \Delta \vec{r}_i$$

(siehe 2-6; Änderung von $\Phi(\vec{r})$ in beliebige Richtung)

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [\Phi(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i) - \Phi(\vec{r}_i)]$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} [-\Phi(\vec{r}_a) + \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_1) + \dots + \Phi(\vec{r}_b)]$$

$$= \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) \quad \text{unabhängig von der Form des Weges } C$$

merke also

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)$$

$\Phi(\vec{r})$ heißt Stammfunktion oder Potential von $\vec{A}(\vec{r})$

es gilt: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$

bilde $\underbrace{\Phi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \Phi(\vec{r})}_{=} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r} + \Delta \vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \Delta \vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$

$$= \vec{\nabla} \Phi \cdot \Delta \vec{r}$$

$$= \vec{A}(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \Phi = \vec{A}(\vec{r}) \quad \checkmark$$

$$\uparrow \\ \Delta \vec{r} \rightarrow 0$$

einfaches Kriterium für die Wegunabhängigkeit von

$$\int_{\vec{r}_{A,C}}^{\vec{r}_B} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

→ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ muß erfüllt sein, denn

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \Rightarrow \vec{A} \text{ als Gradientenfeld darstellbar}$$

Beispiele

- geschlossenes Kurvenintegral über Gradientenfelder

betrachte $\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ für das Gradientenfeld
 $\vec{A} = \vec{\nabla} \phi$

$$\oint \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_b) - \phi(\vec{r}_a) = 0$$

↑
 $\vec{r}_a = \vec{r}_b$

- $\vec{A}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$

⇒ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ (siehe letzte Vorlesung)

- d.h.
- $\vec{A}(\vec{r})$ ist wirbelfrei
 - $\vec{A}(\vec{r})$ läßt sich als Gradientenfeld darstellen
 - $\int \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg

Berechnung des Potentials $\Phi(\vec{r})$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi$

147

es gilt: $\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$

wähle $\vec{r}_a = 0 \rightarrow \Phi(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} f(r') \vec{r}' \cdot d\vec{r}' = \dots$

wähle Parameterdarstellung des Wegs C : $\vec{r}'(t) = \frac{1}{r} \vec{r}' t$
 $0 \leq t \leq r$

$$= \int_0^r f(r'(t)) \vec{r}'(t) \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} dt$$

$r'(t) = t$
 $r'(t) = |\vec{r}'(t)|$

$$= \int_0^r f(t) \underbrace{\vec{r}' \cdot \frac{1}{r} \vec{r}'}_{\frac{\vec{r}'^2}{r^2} t} dt = \int_0^r f(t) t dt$$

sei $F(r)$ Stammfunktion zu $f(t)t$

$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = F(r)$

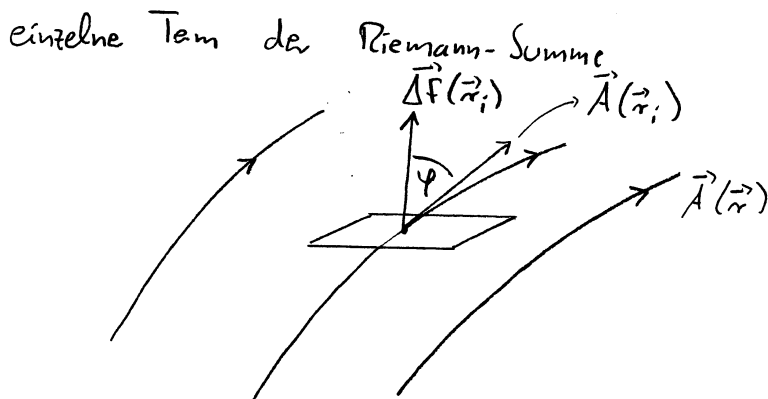
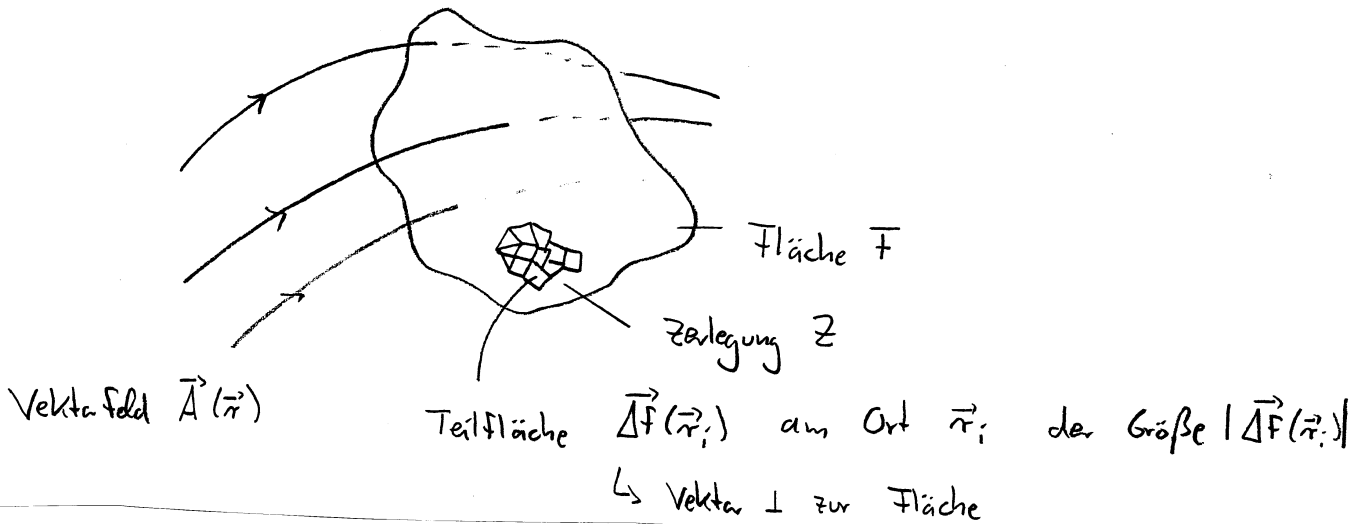
check: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i}$$
$$= f(r) \cdot r \frac{x_i}{r} = f(r) x_i$$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$ ✓

Definition: „Flächenintegral“, „Fluß“

$$\Phi = \int_{\overline{F}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}(\vec{r}) := \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{F}(\vec{r}_i)$$



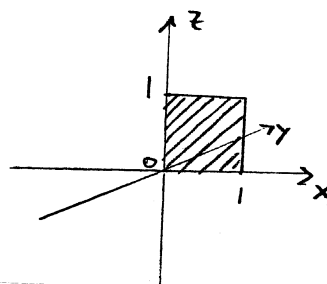
$$\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{F}(\vec{r}_i) = |\Delta\vec{F}| \cdot \underbrace{|\vec{A}|}_{= A_{\perp}} \cdot \cos \psi$$

Komponente des Vektorfeldes \perp zum Flächenelement

einfache Beispiel:

$$\vec{A} = \text{const}$$

\overline{F} gegeben durch



$$\Rightarrow \oint_{\vec{F}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}(\vec{r}) = \vec{A} \cdot \vec{F} = A_y$$

mit $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Achtung: Vorzeichen beliebig

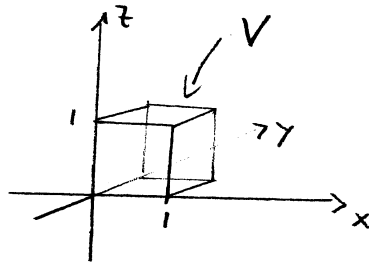
Volumenintegrale

Definition: „Volumenintegral“

$$\int_V \psi(\vec{r}) dV \equiv \int_V \psi(\vec{r}) d^3r := \lim_{Z \rightarrow \infty} \sum_i \psi(\vec{r}_i) \Delta V(\vec{r}_i)$$

einfaches Beispiel:

$$\psi(\vec{r}) = x^2 y \sin(\pi z)$$



$$\Rightarrow \int_V \psi(\vec{r}) dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz x^2 y \sin(\pi z)$$

Dreifachintegral!

$$= \underbrace{\int_0^1 x^2 dx}_{= \frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^1 y dy}_{= \frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi z) dz}_{= -\frac{1}{\pi} [\cos(\pi z)]_0^1} = \frac{2}{\pi}$$

einfache Begrenzungsflächen:

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq z \leq 1$$

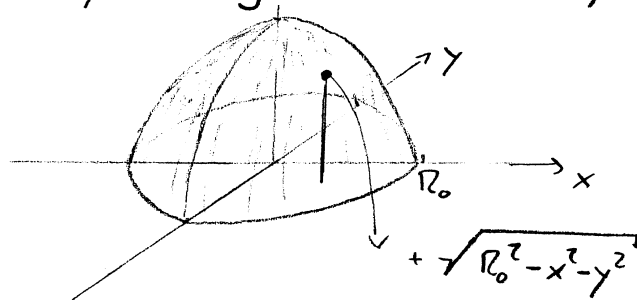
Beschreibung von Flächen im Raum

1, Kartesische Koordinaten

Beispiel: - Kugeloberfläche (Radius R_0) wird beschrieben durch

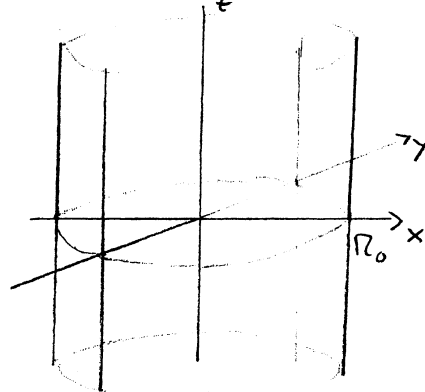
$$F: (x, y, \pm (R_0^2 - x^2 - y^2)^{1/2})$$

mit x, y beliebig sofern $x^2 + y^2 \leq R_0^2$



- Oberfläche eines unendlich langen Zylinders

$$F: (x, \pm \sqrt{R_0^2 - x^2}, z) \quad \text{mit } x^2 \leq R_0^2 \text{ und } z \text{ beliebig}$$



2, Zylinderkoordinaten

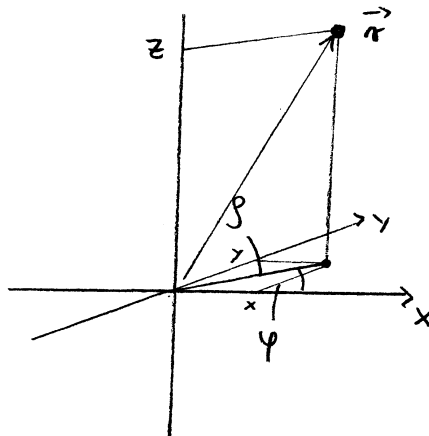
Verwende zur Beschreibung eines Punktes \vec{r} nicht (x, y, z) sondern (ρ, φ, z)

mit

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$



Umkehrung: $x = \rho \cos \varphi$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\rho \geq 0$$

=> einfacher Beschreibung der Zylinderoberfläche

$$F: (\rho = \rho_0, \varphi \text{ beliebig}, z \text{ beliebig})$$

3, Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$$

$$z = r \cos \vartheta$$

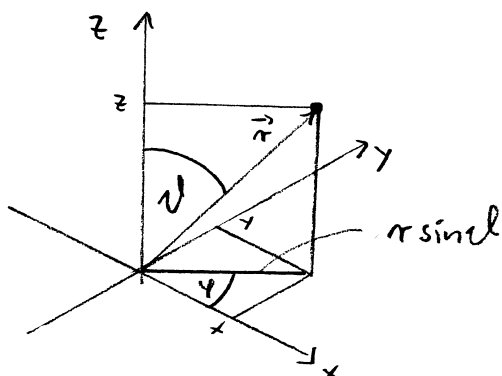
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \vartheta = +\sqrt{x^2 + y^2} / z$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$



$$\vartheta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$r \geq 0$$