Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 1: Abgabetermin: Dienstag, der 15.10.2019, 10:00

Aufgabe 1: zweidimensionale Bahnen

(5 Punkte)

Gegeben sind die folgenden zweidimensionalen Bahnen in der Darstellung als vektorwertige Funktionen $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, 2$:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \ .$$

a) Skizzieren Sie diese beiden Bahnen (2 Punkte).

b) Berechnen Sie für beide Bahnen die Geschwindigkeiten $\vec{v}_i(t)$ und die Beschleunigungen $\vec{a}_i(t)$ (2 Punkte).

c*) Jetzt wird angenommen, dass sich die Bahnen $\vec{r}_i(t)$ als Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung (2. Axiom) ergeben. Wie lautet das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ für die Bahnen $\vec{r}_i(t)$? (Hinweis: beide Bahnen ergeben sich als Bewegung in *demselben* Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$.) (1 Punkt)

Aufgabe 2: komplexe Zahlen

(3 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{1-i}{2+i} - \frac{1}{i} + i^2 \ , \quad z_2 = (1+i)e^{-i\pi} \ . \quad \text{(2 Punkte)}$$

b) Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $z = re^{i\varphi}$:

$$z_3 = -2 + 2i \ . \quad \text{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 3: Differentialgleichung

(6 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$:

$$2x(t) + \dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = 0 \ .$$

a) Geben Sie einen geeigneten Ansatz für die Lösung dieser Differentialgleichung an. Auf welche algebraische Gleichung reduziert sich damit die Differentialgleichung? (2 Punkte)

b) Lösen Sie diese algebraische Gleichung und konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (2 Punkte)
Hinweis: die allgemeine Lösung lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$x(t) = e^{\beta t}\left(c_1 e^{\gamma i t} + c_2 e^{-\gamma i t}\right) \ .$$

Im folgenden werden $c_1 = \frac{1}{2}(a - ib)$ und $c_2 = \frac{1}{2}(a + ib)$ gesetzt $(a, b \in \mathbb{R})$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Gleichung $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, dass sich für diese Wahl der $c_{1/2}$ eine rein reelle Lösung für $x(t)$ ergibt. (1 Punkt)

d) Skizzieren Sie diese Lösung für $a = 0$, $b = 1$ (für $t \geq 0$). (1 Punkt)

Aufgabe 4: Gradientenfelder

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Gradientenfelder $\vec{\nabla}\varphi_i(\vec{r})$ der folgenden skalaren Felder:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \varphi_1(\vec{r}) &= xyz \ . \quad \text{(1 Punkt)} \\
\text{b) } \varphi_2(\vec{r}) &= \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) \ . \quad \text{(1 Punkt)} \\
\text{c) } \varphi_3(\vec{r}) &= r^n \ , \ \text{mit } r = |\vec{r}| \text{ und } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \ . \quad \text{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Divergenz

(3 Punkte)

Die Divergenz eines Vektorfelds $\vec{A}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \ , \ \text{mit } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die Divergenz der Vektorfelder

a) $\vec{A}_1(\vec{r}) = \vec{r}$, (1 Punkt)

b) $\vec{A}_2(\vec{r}) = \vec{b} \times \vec{r}$, mit einem konstanten Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. (2 Punkte)