Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 10: Abgabetermin: Dienstag, der 17.12.2019, 10:00

Aufgabe 1: Newtonsche Mechanik III

(2 Punkte)

a) Gegeben ist ein eindimensionales Potential der Form:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^n \ .$$

Die Bahn $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega^2 = k/m$, ist die allgemeine Lösung für:

$$\square\ k = 0,\ n = 1\ ;\quad \square\ k < 0,\ n = 3\ ;\quad \square\ k < 0,\ n = 1\ ;\quad \square\ k > 0,\ n = 2\ .$$

b) Auf zwei Körper (Massen m_1 und m_2) an den Orten $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{r}_2 = \vec{0}$ wirkt aufgrund der Gravitationswechselwirkung eine anziehende Kraft. Die Kraft auf Körper 1 ist gegeben durch:

$$\square\ \vec{F}_1 = Gm_1\vec{r}_1\ ;\quad \square\ \vec{F}_1 = G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}\ ;$$

$$\square\ \vec{F}_1 = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3}\ ;\quad \square\ \vec{F}_1 = G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^2}\ .$$

Aufgabe 2: Lagrangeformalismus

(2 Punkte)

a) Zwei Körper (Massen $m_1 = m_2 = m$) sind durch einen masselosen Stab mit konstanter Länge l verbunden und bewegen sich ohne weitere Einschränkungen in der zweidimensionalen Ebene. Geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade (= Zahl der verallgemeinerten Koordinaten) an.

$$\square\ f = 2\ ;\quad \square\ f = 3\ ;\quad \square\ f = 4\ ;\quad \square\ f = 5\ .$$

b) Die Lagrangefunktion eines mechanischen Systems ist gegeben durch:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)\ .$$

Damit ergibt sich die folgende Lagrangegleichung:

$$\square\ \dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0\ ;\quad \square\ ml^2\ddot{\varphi} = 0\ ;$$

$$\square\ ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin(\varphi)\ ;\quad \square\ m\sin(\dot{\varphi}) + \frac{g}{l}\cos(\varphi) = 0\ .$$

Aufgabe 3: elektrisches Feld und elektrostatisches Potential

(5 Punkte)

a) Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \; .$$

Zeigen Sie, dass für beliebige (diskrete oder kontinuierliche) Ladungsverteilungen gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \; .$$

(3 Punkte)

b) Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Zeigen Sie, dass für dieses $\phi(\vec{r})$ gilt: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Gaußscher Satz

(12 Punkte)

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\oint_{F_V} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{f} = \int_V \mathrm{d}V\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \tag{1}$$

lässt sich ein Volumenintegral über das Volumen V (rechte Seite in Gleichung (1)) als Flächenintegral über die Oberfläche F_V dieses Volumens (linke Seite in Gleichung (1)) darstellen (entsprechend natürlich auch umgekehrt). In dieser Aufgabe sollen beide Seiten von Gleichung (1) für einige Beispiele explizit berechnet werden und damit die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für diese Fälle überprüft werden.

Im folgenden ist V_1 das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge 1 und $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$; V_2 ist das Volumen einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{0}$. (Punkteverteilung: 2 - 2 - 3 - 2 - 3)

a) $V = V_1$, $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) $V = V_1$, $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ (beliebig, aber konstant)

c) $V = V_1$, $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit einer differenzierbaren Funktion $f(x)$.

d) $V = V_2$, $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$.

e) $V = V_2$, $\vec{A}(\vec{r}) = g(r)\vec{e}_r$ mit einer differenzierbaren Funktion $g(r)$.