

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 11: Abgabetermin: Dienstag, der 07.01.2020, 10:00

Aufgabe 1*: Darstellungen der dreidimensionalen δ -Funktion

(7 Punkte)

- a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugel um den Koordinatenursprung mit Radius R und Gesamtladung Q . Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_R(\vec{r})$ an und zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow 0} \rho_R(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}) .$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass i) die Ladungsdichte in diesem Limes für $|\vec{r}| \neq 0$ verschwindet und ii) dass das Integral über die Ladungsdichte die Gesamtladung ergibt. (2 Punkte)

- b) In der Vorlesung wurde folgende Darstellung der δ -Funktion verwendet:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (1)$$

Zeigen Sie zunächst, dass die linke Seite dieser Gleichung für alle $\vec{r} \neq \vec{r}'$ verschwindet. (2 Punkte)

- c) Setzen Sie jetzt in Gl. (1) $\vec{r}' = 0$ und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung über das Volumen einer Kugel mit Zentrum im Koordinatenursprung und Radius R . Verwenden Sie für die Auswertung des Integrals auf der linken Seite den Gaußschen Satz. (3 Punkte)

Aufgabe 2: elektrisches Feld einer geladenen Kugel

(8 Punkte)

Gegeben ist die Ladungsdichte einer geladenen Kugel (Radius R):

$$\rho(r) = \begin{cases} a + br + cr^2 & : 0 \leq r \leq R , \\ 0 & : r > R , \end{cases}$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$), die Ladungsdichte hängt also nur von $r = |\vec{r}|$ ab.

- a) Berechnen Sie die Gesamtladung der Kugel.
Hinweis: Es gilt $Q = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr$. (1 Punkt)

- b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes (analog zur Rechnung im Vorlesungsskript für die homogen geladene Kugel). (5 Punkte)

Betrachten Sie jetzt eine geladene Kugel mit *beliebiger* Ladungsverteilung $\rho_0(r)$ für $0 \leq r \leq R$ und Gesamtladung Q , also

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(r) & : 0 \leq r \leq R, \\ 0 & : r > R, \end{cases}$$

- c) Wie hängt das elektrische Feld außerhalb der Kugel ($r > R$) von der Ladungsverteilung ab? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Stokesscher Satz

(6 Punkte)

Gegeben ist das Vektorfeld:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ über die Kreislinie in der x - z -Ebene mit Zentrum der Kreisfläche bei $(0, 0, 0)$ und Radius R , und zwar:

- a) durch explizite Berechnung des Linienintegrals und ... (3 Punkte)
b) ... unter Verwendung des Stokesschen Satzes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{F_C} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{F}$$

durch die Berechnung des entsprechenden Flächenintegrals. (3 Punkte)