Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 12: Abgabetermin: Dienstag, der 14.01.2020, 10:00

Aufgabe 1: elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders

(6 Punkte)

Gegeben ist die Ladungsdichte eines (unendlich langen) homogen geladenen Zylinders (Radius R)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : \quad 0 \leq r \leq R \\ 0 & : \quad r > R \end{cases} .$$

In der Beschreibung mit Zylinderkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi, z$ hängt die Ladungsdichte also nur von r ab.

a) Das elektrostatische Potential Φ hängt damit ebenfalls nur von r ab. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r ,$$

mit $\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ dem Einheitsvektor in r-Richtung. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Funktion $E(r)$ für $0 \leq r < \infty$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: Wählen Sie für die dabei auftretenden Integrale das Volumen bzw. die Oberfläche eines Zylinders der Länge L ($0 \leq z \leq L$) und Radius r. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Bildladungsmethode für zwei Punktladungen

(6 Punkte)

Gegeben ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{a}_1) - q\delta(\vec{r} - \vec{a}_2) ,$$

also zwei Punktladungen mit Ladung $+q, -q$ an den Orten $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, mit $\vec{a}_1 = (-a, 0, 0)$ und $\vec{a}_2 = (-2a, 0, 0)$ ($a > 0$). Die beiden Punktladungen befinden sich im Volumen $V = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$ welches durch eine Metalloberfläche $F = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$ begrenzt ist. Die Randbedingung sei gegeben durch $\phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$.

In der Bildladungsmethode für diese Geometrie betrachtet man eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) + \bar{\rho}(\vec{r})$ mit $\bar{\rho}(x, y, z) = -\rho(-x, y, z)$.

a) Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential dieses so konstruierten $\rho_0(\vec{r})$ die Randbedingung für $\vec{r} \in F$ erfüllt. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie Tangential- und Normalkomponente des elektrischen Felds für $\vec{r} \in F$. (3 Punkte)

c) Geben sie das elektrische Feld für $\vec{r} = \vec{0}$ an. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Bildladungsmethode für einen geladenen Draht

(6 Punkte)

Gegeben ist die Ladungsdichte eines unendlich langen, unendlich dünnen Drahts:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \delta(y)\delta(x+a) \quad (a > 0),$$

(Draht parallel zur z-Achse, Schnittpunkt mit der x-y-Ebene bei $(-a, 0)$). Der Draht befindet sich im Volumen $V = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$ welches durch eine Metalloberfläche $F = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$ begrenzt ist. Die Randbedingung ist gegeben durch $\phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$.

In der Bildladungsmethode für diese Geometrie betrachtet man eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) + \bar{\rho}(\vec{r})$ mit $\bar{\rho}(x, y, z) = -\rho(-x, y, z)$.

Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential dieses so konstruierten $\rho_0(\vec{r})$ die Randbedingung für $\vec{r} \in F$ erfüllt.

Aufgabe 4: Elektrostatik

(2 Punkte)

a) Zwei Punkteladungen mit $q_1 = q_2 = q$ befinden sich an den Orten $\vec{r}_1 = \vec{a}$ und $\vec{r}_2 = -\vec{a}$ mit $\vec{a} = (1, 0, 0)$. Für das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung gilt $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ für:

$$\square\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \square\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \square\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \square\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

b) Für das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Mittelpunkt bei $\vec{0}$ gilt:

☐ $|\vec{E}(\vec{r})|$ ist maximal auf der Kugeloberfläche.

☐ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ für alle $\vec{r}$ innerhalb der Kugel.

☐ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi$ für alle $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

☐ $|\vec{E}(\vec{r})|$ ist maximal für $\vec{r} = \vec{0}$.