Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 13: Abgabetermin: Dienstag, der 21.01.2020, 10:00

Aufgabe 1*: Bildladungsmethode für beliebige Ladungsverteilung

(7 Punkte)

Gegeben ist eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ (diskret oder kontinuierlich) mit $\vec{r} \in V$ und $V = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$. Für $\rho(\vec{r})$ soll gelten: $\rho(x, y, z) = 0$ für $x \geq 0$. Das Volumen V ist durch eine Metalloberfläche $F = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$ begrenzt und die Randbedingung ist gegeben durch $\phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$.

a) Konstruieren Sie eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r})$, die für $\vec{r} \in V$ mit $\rho(\vec{r})$ übereinstimmt, und die die Randbedingung für das Potential für $\vec{r} \in F$ erfüllt.
(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}).$$

auf der Metalloberfläche. Hinweis: Da $\rho(\vec{r})$ nicht explizit gegeben ist, ist hier lediglich ein Ausdruck für $\sigma(\vec{r})$ in Form eines Integrals über $\rho(\vec{r})$ gesucht.
(2 Punkte)

c) Überprüfen Sie das Ergebnis für $\sigma(\vec{r})$ für die in der Vorlesung untersuchte Ladungsverteilung, also für $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{a})$ mit $\vec{a} = (-a, 0, 0)$. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Magnetfeld eines unendlich dünnen Drahts

(8 Punkte)

Gegeben ist die Stromdichte eines unendlich dünnen Drahts:

$$\vec{j}(\vec{r}) = j\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z \ .$$

a*) Berechnen Sie das von dieser Stromdichte erzeugte Magnetfeld zunächst durch explizite Integration, d.h. mit Hilfe der Formel:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \ . \quad \text{(3 Punkte)}$$

b) Das Magnetfeld lässt sich auch mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechnen: (5 Punkte)

   - Setzen Sie für das Magnetfeld die Form (in Zylinderkoordinaten) $\vec{B}(\vec{r}) = f(\rho)\vec{e}_\varphi$ an, mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}(-y, x, 0)$ in φ-Richtung, dem radialen Abstand $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der z-Achse und einer zu bestimmenden Funktion $f(\rho)$.
   - Verwenden Sie als Integrationsweg für das Linienintegral eine geschlossene Kreislinie in der x-y-Ebene mit Radius ρ um den Koordinatenursprung.

Aufgabe 3: Magnetfeld eines Drahts mit $R > 0$

(6 Punkte)

Gegeben ist die Stromdichte eines unendlich langen Zylinders mit Radius R:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} j\vec{e}_z & : \quad 0 \leq \rho \leq R \\ \vec{0} & : \quad \rho > R \end{cases} \quad ,$$

In der Beschreibung mit Zylinderkoordinaten $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi, z$ hängt die Stromdichte also nur von ρ ab.

Berechnen Sie das von dieser Stromdichte erzeugte Magnetfeld für $0 < \rho \leq R$ (innerhalb) und $\rho > R$ (außerhalb des Zylinders) mit Hilfe des Stokesschen Satzes für $\vec{B}(\vec{r})$.
(Zur Vorgehensweise siehe Aufgabe 2b).)

Aufgabe 4*: Magnetostatik

(2 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Grundgleichungen der Magnetostatik sowie dem Gaußschen und Stokesschen Satz, dass ...

a) ... das Flächenintegral $\oint_{F_V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ über die geschlossene Fläche F_V eines Volumens V verschwindet. (1 Punkt)

b) ... das Linienintegral $\oint_{C_F} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ über die Randlinie C_F einer Fläche F proportional ist zum Strom I_F durch diese Fläche. (1 Punkt)