Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 3: Abgabetermin: Dienstag, der 29.10.2019, 10:00

Aufgabe 1: Wegintegral, Arbeit

(5 Punkte)

Gegeben ist folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} z - x \\ x + y \\ y - z \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ entlang des Wegs C geleistete Arbeit W mit

$$W = \int_{\vec{a},C}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0,0,0) \quad , \quad \vec{b} = (1,1,1) \ .$$

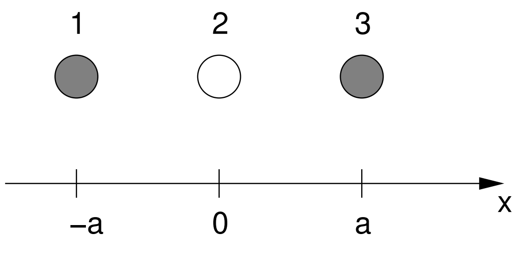
Dabei ist der Weg C gegeben durch:

$$C \quad : \quad \vec{r}(t) = (t, t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1$$

Hinweis: $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \mathrm{d}t \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$

Aufgabe 2: Gravitationspotential in $d = 1$

(4 Punkte)



Gegeben ist das in der Abbildung dargestellte Dreikörper-Problem in Dimension $d = 1$, wobei die Körper über das Gravitationspotential

$$V(x_i, x_j) = -G m_i m_j \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

wechselwirken. Für die Massen gilt $m_i = m$, $i = 1, 2, 3$. Die Positionen der Körper 1 und 3 werden als fest angenommen: $x_1 = -a$, $x_3 = a$ ($a > 0$), d.h. nur der Körper 2 kann sich im Gravitationfeld der beiden anderen Körper bewegen.

a) Wie lautet das Potential $V(x)$ des Körpers 2 ($x = x_2$) im Bereich $-a < x < a$? (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass bei $x = 0$ eine instabile Ruhelage vorliegt. (2 Punkte)

c) Geben Sie die Taylor-Entwicklung des Potentials $V(x)$ um $x = 0$ bis zur Ordnung x^2 an. (1 Punkt)

Aufgabe 3: N-Teilchen-System

(3 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen (Massenpunkte mit Massen m_i, $i = 1, \ldots N$), die über die Gravitationskraft miteinander wechselwirken. Zusätzlich befinden sich die Teilchen in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}_e(\vec{r})$.

a) Wie lauten die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen? (1 Punkt)

b) Setzen Sie nun $\vec{F}_e(\vec{r}) = 0$. Zeigen Sie, dass innere Kräfte ein System aus Massenpunkten (das oben definierte N-Teilchen-System) nicht beschleunigen können. Betrachten Sie dazu die zweite zeitliche Ableitung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ mit

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4: dreidimensionaler harmonischer Oszillator

(9 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = \alpha r^2$ ($r = |\vec{r}|$). Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$; die Geschwindigkeit sei $\vec{v}_0 = (0, 1, 1)$.

a) Wie lauten das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und die Bewegungsgleichung für das Teilchen in kartesischen Koordinaten? (2 Punkte)

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die spezielle Lösung unter den gegebenen Anfangsbedingungen an. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit der kinetischen und potentiellen Energie. Gilt der Energieerhaltungssatz? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie für die spezielle Lösung die Zeitabhängigkeit des Drehimpulses. (2 Punkte)