Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

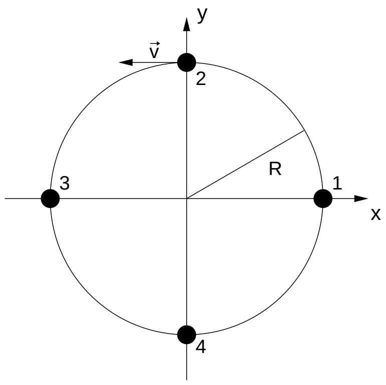
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 4: Abgabetermin: Dienstag, der 05.11.2019, 10:00

Aufgabe 1: N Teilchen auf einer Kreisbahn

(12 Punkte)



Gegeben ist ein System aus N Körpern (mit Massen $m_i = m$, $i = 1, \ldots, N$), die über die Gravitationskraft wechselwirken. Wie in der Abbildung für $N = 4$ skizziert, bewegen sich die Körper auf einer Kreisbahn mit Radius R. Der Betrag der Geschwindigkeit ist für alle Körper konstant: $|\vec{v}_i(t)| = v$.

a) Geben Sie die Bahnen $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, für beliebige Werte von N an. Hinweis: die Abbildung zeigt die Positionen der Körper zur Zeit $t = 0$, die Winkel sind also gegeben durch $\varphi_i = (i-1)2\pi/N$. (2 Punkte)

b*) Berechnen Sie die (Gesamt-)Kraft $\vec{F}_1$ auf den Körper 1 zur Zeit $t = 0$. Hinweis: es ergibt sich

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \text{mit} \ \ F_x = -\frac{Gm^2}{4R^2} \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{\sin((j-1)\frac{\pi}{N})} \ .$$

(4 Punkte)

c*) Berechnen Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit v der Körper. Hinweis: es ergibt sich

$$v^2 = \frac{Gm}{4R} \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{\sin((j-1)\frac{\pi}{N})} \ .$$

(4 Punkte)

d*) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v für $N = 3$ und $N = 4$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Kraftfeld, Potential, Wegintegral

(11 Punkte)

Gegeben ist ein Kraftfeld der Form

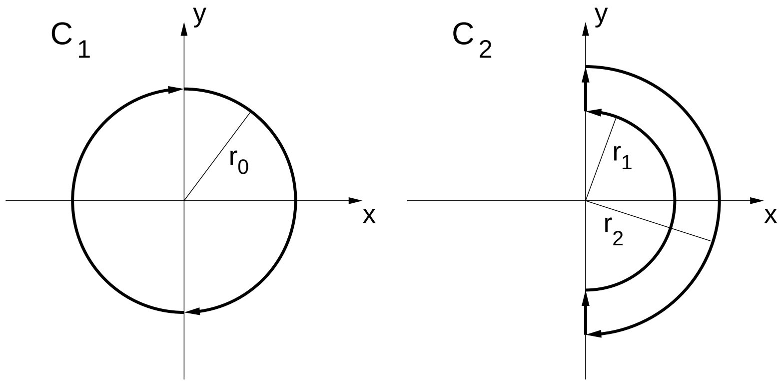
$$\vec{F}(\vec{r}) = g(r) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $g(r)$ einer beliebigen Funktion von r.

a*) Für welchen Funktionen $g(r)$ ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ wirbelfrei? (4 Punkte)

Im folgenden wird $g(r) = \frac{1}{r^2}$ gesetzt.

b) Berechnen Sie für das entsprechende Kraftfeld die Arbeit ΔA entlang der beiden geschlossenen Wege C_1 und C_2. Hinweis: Beachten Sie die in der Abbildung angegebene Umlaufrichtung der beiden Wege.



(4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass sich auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z) | y = 0 \; \& \; x \leq 0\}$ das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ aus dem Potential

$$V(\vec{r}) = -\varphi = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

berechnen lässt. Hinweise: φ ist der Winkel in Zylinderkoordinaten; es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = 1/(1 + x^2)$. (2 Punkte)

d) Veranschaulichen Sie das Potential mit Hilfe von Höhenlinien auf dem Gebiet G (für $z = 0$). (1 Punkt)