Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 5: Abgabetermin: Dienstag, der 12.11.2019, 10:00

Aufgabe 1: Zeitverbrauch bei eindimensionaler Bewegung

(9 Punkte)

a*) In der Vorlesung wurde die Schwingungsperiode einer gebundenen eindimensionalen Bewegung mit konstanter Energie E im Potential $V(x)$ hergeleitet:

$$\tau = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\, \mathrm{d}x \ ,$$

mit x_1, x_2 den beiden Umkehrpunkten und $E = V(x_1) = V(x_2)$. Das Potential sei gegeben durch $V(x) = k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$.

Führen Sie eine geeignete Substitution auf eine Variable u durch, so dass der Integrand von der (dimensionslosen) Form $1/(\sqrt{1 - |u|^\alpha})$ ist. Lesen Sie am entstandenen Ausdruck ab, für welche Werte von α die Schwingungsperiode *nicht* von der Gesamtenergie abhängt. (5 Punkte)

b) Betrachten Sie jetzt das repulsive Potential $V(x) = -k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$. Die Energie des Teilchens sei $E = 0$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $x = x_0 > 0$. Für welche Werte von α ist die Zeit, die das Teilchen zum Erreichen der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ braucht, endlich?
(4 Punkte)

Aufgabe 2: Phasenraum I

(4 Punkte)

Betrachtet wird jetzt die eindimensionale Bewegung eines Teilchens (Masse m) im Schwerefeld, d.h. im Potential $V(x) = mgx$.

a) Bestimmen Sie aus der Hamilton-Funktion $H(x, p)$ dieses Systems und der Bedingung $H(x, p) = E$ die Höhenlinien von H durch Angabe der Funktionen $p(x)$. (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie damit das Phasenraumporträt dieses Systems. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Phasenraum II

(7 Punkte)

a) Wie lautet die Hamilton-Funktion für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x) = \alpha x^{2n}$, $\alpha > 0$, $n = 1, 2, \ldots$? (1 Punkt)

b) Um das Phasenraumporträt zu skizzieren ist es nützlich, zunächst die Schnittpunkte der Phasenraumbahnen (= Höhenlinien der Hamilton-Funktion) mit der x- und p-Achse zu bestimmen. Geben Sie diese Schnittpunkte für äquidistante Gesamtenergien $E_k = kE_0$ ($E_0 > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) an. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie mit den Informationen aus Teilaufgabe b) die Phasenraumbahnen für $n = 2$ und $k = 0, 1, 2, 3, 4$. (3 Punkte)

d) Der Phasenraum in dieser Aufgabe ist zweidimensional. Wodurch wird im allgemeinen Fall die Dimension des Phasenraums bestimmt? (1 Punkt)