Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

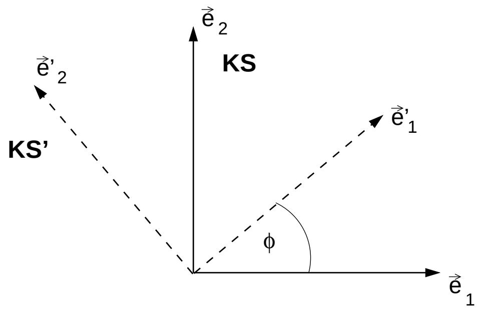
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 7: Abgabetermin: Dienstag, der 26.11.2019, 10:00

Aufgabe 1: rotierende Bezugssysteme

(4 Punkte)



Betrachten Sie, wie in der Abbildung dargestellt, ein zweidimensionales Koordinatensystem KS′, das relativ zu dem ruhenden Koordinatensystem KS mit $\phi(t) = \alpha t$ rotiert.

a) Wie lauten die Koordinaten eines Körpers in KS′, der sich in KS am Ort $\vec{r}_0 = (1, 0)$ befindet. Berechnen Sie die Kraft (Scheinkraft), welche für die Bewegung des Körpers in KS′ verantwortlich zu sein scheint. (2 Punkte)

b) Der Körper bewegt sich nun in KS auf der Bahn $\vec{r}(t) = (t, 1)$. Berechnen Sie die Bahn in KS′ und die entsprechende Scheinkraft. (2 Punkte)

Aufgabe 2*: Zweikörperproblem - Winkelverschiebung

(8 Punkte)

Die elliptischen Bahnen des Keplerproblems sind charakterisiert durch eine Winkelverschiebung von $\Delta\varphi = 2\pi$. In dieser Aufgabe soll der Einfluss eines zusätzlichen Terms im Potential der Form β/r^2 auf die Winkelverschiebung untersucht werden, das Potential ist also gegeben durch:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \ .$$

(Hinweis: die einzelnen Rechenschritte sind analog zur Herleitung im Vorlesungsskript.)

a) Geben Sie das entsprechende effektive Potential $U(r)$ der effektiven eindimensionalen Bewegung an. (1 Punkt)

b) Ausgangspunkt ist die Energie der Relativbewegung in der Form

$$E_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) \ .$$

Ersetzen Sie in dieser Gleichung die Ableitung $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ durch $\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}\varphi}$ der Funktion $\bar{r}(\varphi)$. (1 Punkt)

c) Mit Hilfe des inversen Radius

$$u(\varphi) = \frac{1}{\bar{r}(\varphi)}$$

lässt sich der Ausdruck weiter vereinfachen und führt schließlich auf eine inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u(\varphi)$. Geben Sie diese Differentialgleichung an. (2 Punkte)

d) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung? (2 Punkte)

e) Die Parameter der allgemeinen Lösung werden nun so gewählt, dass $u(\varphi)$ für $\varphi = 0$ maximal ist. Was folgt daraus für $\bar{r}(\varphi)$? (1 Punkt)

f) Aus $\bar{r}(\varphi)$ folgt schließlich die gesuchte Winkelverschiebung $\Delta\varphi$. Geben Sie $\Delta\varphi$ an und skizzieren Sie die Abhängigkeit der Winkelverschiebung von β. (1 Punkt)

Aufgabe 3: Drehimpuls

(7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Teilchens auf der Kreisbahn

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ eine Erhaltungsgröße ist. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass für eine beschleunigte Bewegung der Form

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}t^2\vec{g}$$

der Drehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ im Allgemeinen *keine* Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

c) Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Der Vektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in der Zeit t die Fläche $A(t)$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Fläche nach der Zeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \ .$$

(4 Punkte)