Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik I

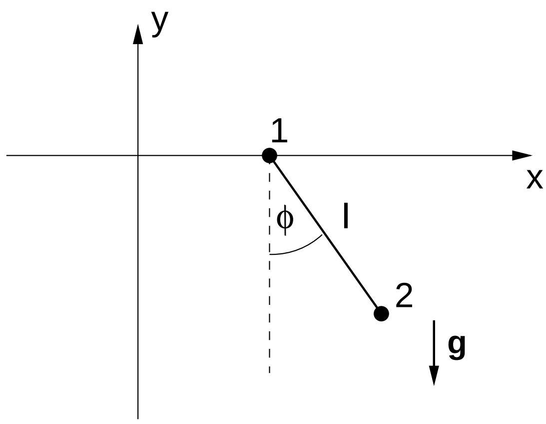
apl. Prof. Dr. R. Bulla

WS 2019/20

Blatt 9: Abgabetermin: Dienstag, der 10.12.2019, 10:00

Aufgabe 1: Lagrangeformalismus: Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

(10 Punkte)



Das in der Abbildung dargestellte System besteht aus zwei Körpern (Massen m_1 und m_2), die über einen masselosen Stab der Länge l verbunden sind. Die Bewegung von Körper 1 ist auf die x-Achse eingeschränkt.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade an. (2 Punkte)

b) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten die x-Koordinate von Körper 1 ($= x_1$) und den Winkel ϕ (siehe Abbildung). Geben Sie die Lagrangefunktion des Systems an. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die beiden Lagrangegleichungen dieses Systems. (2 Punkte)

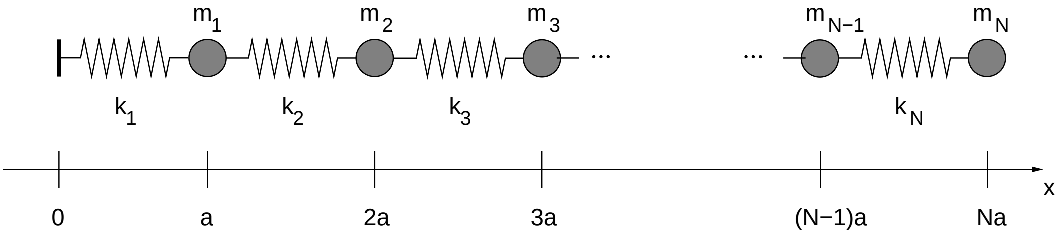
Im folgenden werden nur Lösungen der Differentialgleichungen aus Teilaufgabe c) mit $\phi(t) = 0$ betrachtet.

d*) Geben Sie die allgemeine Lösung für $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$ an (unter der Annahme $\phi(t) = 0$). (2 Punkte)

e*) Geben Sie die Gesamtenergie der Lösungen aus Teilaufgabe d) an. (1 Punkt)

Aufgabe 2: harmonische Kette — Bewegungsgleichungen; Hamilton-Formalismus

(8 Punkte)



Betrachten Sie das in der Abbildung dargestellte System aus N Körpern mit Massen m_n, die über Federn untereinander (mit Federkonstanten $k_2, \ldots, k_N$) und mit dem Aufhängepunkt bei $x = 0$ (mit Federkonstante k_1) verbunden sind. (D.h. feste Randbedingungen am linken Ende und offene Randbedingungen am rechten Ende der Kette.) Die Ruhelagen der Körper sind gegeben durch $x_{n,0} = na$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) und die Auslenkungen aus den Ruhelagen durch $q_n = x_n - x_{n,0}$.

a) Wie lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen q_n ($n = 1, 2, \ldots, N$)? (2 Punkte)

b) Geben Sie die Hamilton-Funktion $H(q, p)$ an ($q = (q_1, \ldots, q_N)$, $p = (p_1, \ldots, p_N)$). Hinweise: es gilt $H = T + V$; die gesamte kinetische Energie ergibt sich direkt aus der Darstellung der kinetischen Energien der einzelnen Körper als Funktion der p_n: die gesamte potentielle Energie ergibt sich als Summe der Beiträge der einzelnen Federn. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie aus der Hamilton-Funktion aus Teilaufgabe b) die Hamiltonschen Gleichungen (das sind 2N Differentialgleichungen erster Ordnung). (2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Gleichungen aus Teilaufgabe c) den Newtonschen Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe a) entsprechen. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Die dreidimensionale δ-Funktion

(5 Punkte)

Berechnen Sie:

$$\int \mathrm{d}^3r \vec{F}(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \ , \ \text{mit} \ \ \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix} \ , \ \text{und} \ \ \vec{r}_0 = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

$$\int \mathrm{d}^3r e^{-r^2}\delta(3\vec{r})$$

$$\int_V \mathrm{d}^3r f(\vec{r}) \sum_{n=0}^{4} \delta(\vec{r} - n\vec{a}) \ , \quad \text{mit} \ \ f(\vec{r}) = x + y + z \ , \ \vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

und V das Volumen einer Kugel mit Radius 2 um den Ursprung.
(Punkteverteilung: 1 - 2 - 2)