B. Elektrodynamik

grundlegende Größen der Elektrodynamik : $\vec{E}(\vec{r},t) \rightarrow$ elektrisches Feld

$\vec{B}(\vec{r},t) \rightarrow$ magnetisches Feld

Quellen diese Felde : $\rho(\vec{r},t) \rightarrow$ Ladungsdichte

$\vec{j}(\vec{r},t) \rightarrow$ Stromdichte

Grundgleichungen de Elektrodynamik : Maxwell - Gleichungen $\rightarrow$ Kap. B.3

↪ vie gekoppelte, partielle Dgl. für $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$

im statischen Fall, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} \dots = 0$

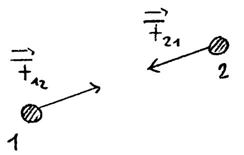
$\rightarrow$ Aufteilung in

→ zwei Dgl. für $\vec{E}(\vec{r})$: Elektrostatik Kap. B.1

→ zwei Dgl. für $\vec{B}(\vec{r})$: Magnetostatik Kap. B.2

B.1. Elektrostatik

betrachte zwei Punktladungen am Ort $\vec{r}_{1/2}$
mit Ladung $q_{1/2}$



für die Kraft $\vec{F}_{12}$ auf die Punktladung 1
gilt das Coulomb - Gesetz :

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}$$

Eigenschaften :

- $\rightarrow$ Coulomb - Kraft ist eine Zentralkraft mit $f(r) = k\, q_1 q_2 \frac{1}{r^2}$ (siehe Kap. A.1)
- $\rightarrow$ $\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$ (3. Newtonsches Axiom)
- $\rightarrow$ $q_1 q_2 > 0$ abstoßende Kraft

  $q_1 q_2 < 0$ anziehende Kraft

Wahl des Einheitensystems

symbolisch : $[\dots]$: Einheit von ...

$$\longrightarrow \underbrace{[\,\text{Kraft}\,]}_{=N} = [\,k q_1 q_2\,] \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{r^2}\right]}_{=\frac{1}{m^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{[\,k q_1 q_2\,]}_{=[k][q]^2} = N\, m^2$$

d.h. Aufteilung nach $[k]$ und $[q]$ nicht eindeutig

Gauß - System : $k = 1$

$\rightarrow [k] = 1$

alternativ: SI - System $\quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\,\frac{Nc^2}{A^2}$

ε_0 : Dielektrizitätskonstante des Vakuums

das elektrische Feld

jetzt: N Punktladungen $q_1, \dots, q_N$ an den Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$

$\rightarrow$ Kraft $\vec{F}$ auf eine weitere Ladung q am Ort $\vec{r}$

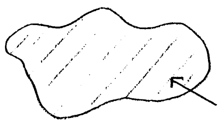
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q\, q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} =: q\,\vec{E}(\vec{r})}$$

d.h.: Definition des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung über die Kraft $\vec{F}$ einer „Probeladung" q

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad \vec{E}(\vec{r}) \text{ ist ein Vektorfeld}$$

$\rightarrow$ elektrisches Feld für eine kontinuierliche Ladungsverteilung:

• $\leftarrow$ Probeladung am Ort $\vec{r}$



Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}\,')$ $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r'\, \varrho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \quad (*)$

$\int d^3r \dots$: Volumenintegral $\qquad \int_V d^3r\, \varrho(\vec{r}) = Q$: die im Volumen V enthaltene Ladung

$\rightarrow$ Ladungsdichte einer diskreten Ladungsverteilung

wie oben: N Punktladungen $\quad \rightarrow \quad \varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$

mit $\delta(\vec{r})$ der dreidimensionalen δ-Funktion

$$\delta(\vec{r}) \equiv \delta^3(\vec{r}) := \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

Eigenschaften:

- $$\int d^3r\, \delta^3(\vec{r}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(y)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z)}_{=1} = 1$$

- $$\int d^3r\, A(\vec{r})\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') = A(\vec{r}\,')$$

Einsetzen dieses $\varrho(\vec{r})$ in $(*)$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i) \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\int d^3r' \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{= \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}} \quad \checkmark$$

das elektrostatische Potential

es gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ (siehe Übungen)

$\rightarrow$ es existiert ein skalares Potential $\Phi(\vec{r})$ (das elektrostatische Potential)

mit : $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})}$

und es gilt : $\boxed{\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$ in den Übungen : $-\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \ldots$

Quellen des elektrischen Feldes

$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$: Divergenz von $\vec{E}(\vec{r})$ entspricht dem Quellenfeld von $\vec{E}(\vec{r})$

<u>es gilt</u>: $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$

<u>Beweis</u>: $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

$$= \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{\overset{!}{=} 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')} \quad \text{(Beweis siehe Übungen)}$$

$$= 4\pi \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad \checkmark$$

damit folgen die <u>Grundgleichungen der Elektrostatik</u> für das elektrische Feld :

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})}$ und $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$

Poisson - Gleichung :

bilde $\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}))}_{= \Delta\Phi} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

mit dem Laplace - Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})}$ $\rightarrow$ Poisson - Gleichung

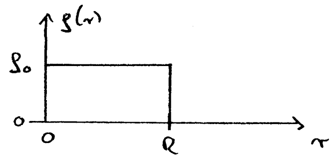
das Grundproblem der Elektrostatik:

gegeben: Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

gesucht: $\vec{E}(\vec{r})$ oder $\Phi(\vec{r})$

Beispiel: Feld einer homogen geladenen Kugel (Radius R)

Ladungsdichte $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : \; 0 \leq r \leq R \\ 0 & : \; r > R \end{cases}$ mit $r = |\vec{r}|$



→ Beschreibung des Problems in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

das elektrostatische Potential: $\Phi = \Phi(r)$

→ unabhängig von ϑ und φ

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(r) = \underbrace{-\Phi'(r)}_{=E(r)}\vec{e}_r = E(r)\,\vec{e}_r \qquad \text{mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Berechnung von $E(r)$ mit Hilfe des Gauß'schen Satzes:

$$\oint_{F_V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=4\pi\rho(\vec{r})}$$ mit V: Volumen einer Kugel mit Radius r um $\vec{O}$

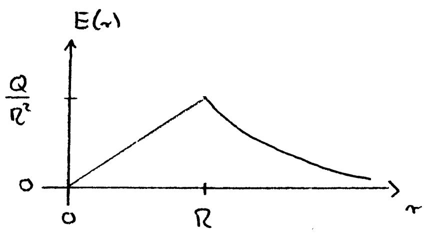
linke Seite: auf der Fläche F_V gilt $\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{E(r)}_{=\text{const}}\vec{e}_r$ und $\vec{E} \parallel d\vec{f}$

$$\Rightarrow \quad \oint_{F_V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = E(r)\,F_V = E(r)\,4\pi r^2$$

rechte Seite: $$= 4\pi \int_V dV \rho(\vec{r}) = \begin{cases} 4\pi Q & : \; r > R \\ 4\pi Q \dfrac{r^3}{R^3} & : \; 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

mit $Q = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{r^2} & : \; r > R \\ Q\dfrac{r}{R^3} & : \; 0 \leq r \leq R \end{cases}$$



die elektrostatische Energie

potentielle Energie eines Systems aus N wechselwirkenden Massenpunkten:

$$V = \sum_{ij\,(i<j)} V_{ij} \qquad \text{hier: } V_{ij} = \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$\rightarrow$ die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte Kraft:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = q_i q_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad \leftarrow \text{ Coulomb-Kraft}$$

schreibe $V = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ davon ausgehend: Übergang zum Kontinuum

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad [\vec{r} = \vec{r}' \text{ bei Integration ausgenommen}]$$

$\hookrightarrow$ Wechselwirkungsenergie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung mit sich selbst

$$\rightarrow V = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \underbrace{\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \Phi(\vec{r})} = \frac{1}{2} \int d^3r \underbrace{\rho(r)}_{= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta\Phi(\vec{r})} \Phi(\vec{r}) = \ldots$$

$$\ldots = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r [\Delta\Phi(\vec{r})] \Phi(\vec{r}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle Integration}}}{=} \frac{1}{8\pi} \int d^3r \underbrace{|\vec{\nabla}\Phi|^2}_{= |\vec{E}(\vec{r})|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \, |\vec{E}(\vec{r})|^2}$$

<u>Def.:</u> $\boxed{u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{r})|^2}$ Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\Rightarrow V = \int d^3r \, u(\vec{r})$$

<u>Beispiel:</u> elektrostatische Energie der homogen geladenen Kugel

Energiedichte: $u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} E(r)^2 = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4} & : r > R \\ \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2 r^2}{R^6} & : 0 \leq r \leq R \end{cases}$

$\downarrow$ hängt nur von r ab $\rightarrow u(r)$

gesamte elektrostatische Energie:

$V = \int d^3r \, u(r) \quad \rightarrow$ Auswertung des Volumenintegrals in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

es gilt: $$\int_V d^3r \, a(r,\vartheta,\varphi) = \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, a(r,\vartheta,\varphi)$$

$\hookrightarrow$ Volumen einer Kugel mit Radius R_0

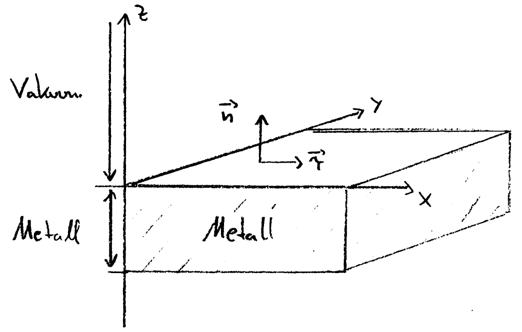
speziell für $a = 1$: $\displaystyle\int_V d^3r = \underbrace{\int_0^{R_0} r^2\,dr}_{=\frac{1}{3}R_0^3} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = \frac{4}{3} R_0^3 \pi$ ✓

hier : $$V = \int_0^\infty dr\, r^2 u(r) \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 4\pi \frac{Q^2}{8\pi} \left[\int_0^R dr \frac{r^4}{R^6} + \int_R^\infty dr \frac{1}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \left[\frac{1}{R^6} \frac{1}{5} \left[r^5 \right]_0^R - \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} \quad \longrightarrow \text{ divergiert für } R \to 0$$

elektrostatische Randbedingungen



betrachte die Grenzfläche zwischen einem metallischen Leiter und dem Vakuum

gesucht : Randbedingungen für $\vec{E}(\vec{r})$ an der Grenzfläche

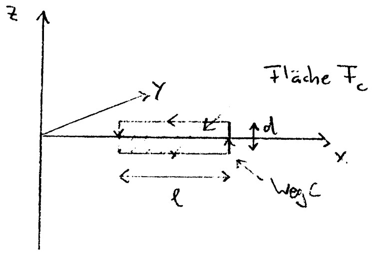
im Metall : frei bewegliche Ladungen

$\Longrightarrow$ es muss gelten $\vec{E}_1 = \vec{0}$ bzw. $\Phi_1 = \text{const}$.

denn: falls $\vec{E}_1 \neq \vec{0}$ $\longrightarrow$ auf die Ladungen wirken Kräfte

$\Longrightarrow$ Verschiebung der Ladungen solange bis $\vec{E}_1 = \vec{0}$

a) tangentiale Randbedingungen



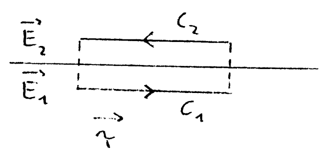
C : geschlossener Weg, der die Grenzfläche umschließt

$d \ll \ell$

Stokes'scher Satz für das elektrische Feld : $\displaystyle\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{F_C} \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{=\vec{0}} \cdot d\vec{f} = 0$

Auswertung des Linienintegrals :

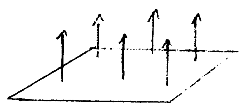
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} \underset{d \ll \ell}{=} \int_{C_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \underset{\vec{E}_1,\,\vec{E}_2 \text{ auf Integrationsweg konstant}}{=} \ell\, \vec{E}_1\cdot\vec{\tau} - \ell\, \vec{E}_2 \cdot \vec{\tau} \overset{!}{=} 0$$



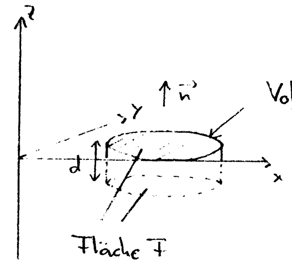
$\rightarrow \quad \vec{\tau} \cdot \vec{E}_1 = \vec{\tau} \cdot \vec{E}_2$

d.h.: • die Tangentialkomponente $\vec{\tau} \cdot \vec{E}$ ist stetig

• $\vec{E}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} \cdot \vec{E}_2 = 0 \quad \rightarrow$ die Feldlinien stehen $\perp$ auf der Oberfläche des Leiters



b) normale Randbedingungen



Gauß'sche Satz:

$$\oint_{F_V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V dV \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{= 4\pi \rho(\vec{r})} = 4\pi \underbrace{\int_V dV \rho(\vec{r})}_{= q}$$

q: die in V enthaltene Ladung

Auswertung des Flächenintegrals:

$$\oint_{F_V} \vec{E} \cdot d\vec{f} \underset{\lim d \to 0}{=} \int_{F_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{f} \underset{\vec{E}_1,\vec{E}_2 \text{ auf Integrationsfläche konstant}}{=} \vec{E}_1 \cdot \vec{F}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{F}_2$$

$\vec{F}_1 = -\vec{n}\, F \quad , \quad \vec{F}_2 = \vec{n}\, F$

$$\Rightarrow \oint_{F_V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = F\,(\vec{n} \cdot \vec{E}_2 - \vec{n} \cdot \vec{E}_1) \stackrel{!}{=} 4\pi q$$

Def.: Oberflächenladungsdichte $\boxed{\sigma = \frac{q}{F}}$

und damit $\boxed{\vec{n} \cdot \vec{E}_2 - \vec{n} \cdot \vec{E}_1 = 4\pi\sigma}$ d.h.: die Normalkomponente $\vec{n} \cdot \vec{E}$ springt an der Oberfläche um $4\pi\sigma$

$\vec{E}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_2 = 4\pi\sigma$

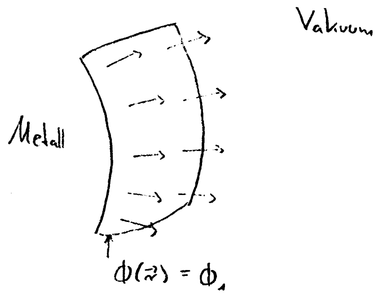
Zusammenhang mit den Randbedingungen für das Potential:

Für ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ gilt:

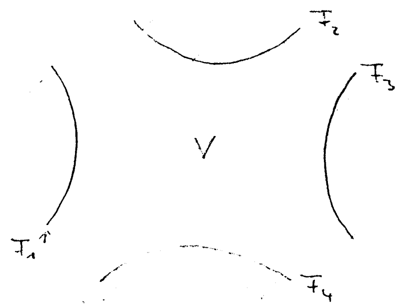
$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ steht $\perp$ auf den Flächen mit $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$

hier: Oberfläche des Metalls = Äquipotentialfläche

$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \Phi_1 = \text{const.}$



allgemeine Formulierung des Randwertproblems



gegeben: - Volumen V, begrenzt durch (getrennte) Metallflächen F_i
- Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in V
- Randbedingungen $\Phi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in F_i} = \Phi_i$

sei $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \ldots$ Dirichlet - Randbedingung $\Phi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in F} = \Phi_0(\vec{r})$

das Randwertproblem lautet also:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) & \text{für } \vec{r}\in V \\ \Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) & \text{für } \vec{r}\in F \end{array}}$$

→ Poisson - Gleichung
→ Dirichlet - Randbedingung

aus der Lösung für das Potential $\Phi(\vec{r})$ folgt:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\underbrace{\vec{n}(\vec{r})}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \qquad \vec{r}\in F$$

↳ Normalenvektor auf der Oberfläche

⟶ Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ $(\vec{r}\in V)$ induziert Ladungsverteilung $\sigma(\vec{r})$ $(\vec{r}\in F)$ auf den (Metall-) Oberflächen

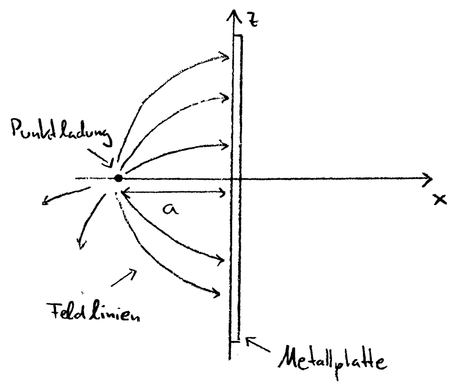
alternative Formulierung des Randwertproblems

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) & \text{für } \vec{r}\in V \\ \vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r}) & \text{für } \vec{r}\in F \end{array}}$$

→ Neumannsche Randbedingung

d.h.: die Oberflächenladungsdichte (und damit die Normalkomponente der elektrischen Felder) ist vorgegeben

Beispiel für ein Randwertproblem

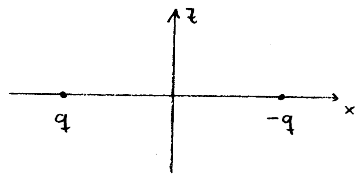


- Volumen $V = \{ \vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x < 0 \}$
- Oberfläche des Metalls
  $F = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0 \}$
- Ladungsdichte in V: $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{a})$
  mit $\vec{a} = (-a, 0, 0)$
  d.h. Punktladung am Ort $\vec{a}$

Dirichlet-Randbedingung: $\Phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$

$\longrightarrow$ Lösung des Problems mit Hilfe der Bildladungsmethode

betrachte folgendes Problem:



- Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{a}) - q\,\delta(\vec{r} + \vec{a})$
  d.h. zusätzliche Ladung $-q$ bei $-\vec{a}$
- Keine Randbedingungen

Potential für dieses Problem: $\boxed{\Phi_0(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = q \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - q \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|}}$

Behauptung:
das Potential $\Phi_0(\vec{r})$ löst das Randwertproblem

zu zeigen ist:

1. $\Delta \Phi_0(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$ für $\vec{r} \in V$

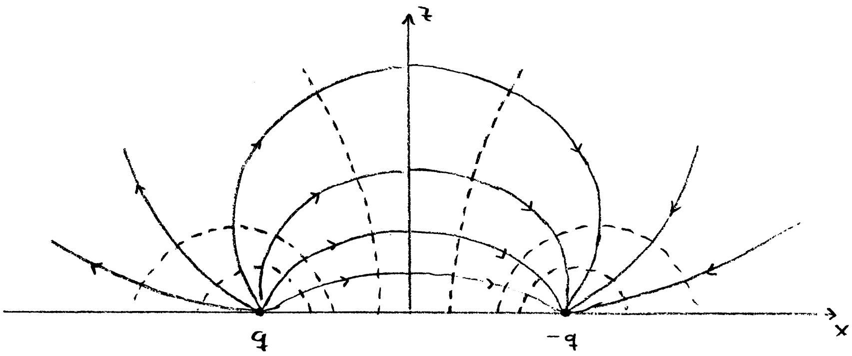
   ist erfüllt, da $\Delta \Phi_0(\vec{r}) = -4\pi \rho_0(\vec{r}) = -4\pi \Big[\underbrace{q\,\delta(\vec{r} - \vec{a})}_{= \rho(\vec{r})} - \underbrace{q\,\delta(\vec{r} + \vec{a})}_{= 0 \text{ für } \vec{r} \in V} \Big]$ ✓

2. $\Phi_0(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$

   setze $\vec{r} = (0, y, z) \longrightarrow \vec{r} \pm \vec{a} = (\mp a, y, z)$, $|\vec{r} \pm \vec{a}| = \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}$

   $\Rightarrow \Phi_0(\vec{r} = (0,y,z)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} (q - q) = 0$ ✓

$\longrightarrow$ Darstellung der Feldlinien ($\vec{E}(\vec{r})$) und Äquipotentialflächen ($\Phi_0(\vec{r}) = \text{const.}$) für $y = 0$
$\rightarrow$ ----



für das elektrische Feld folgt damit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_0(\vec{r}) = q\,\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - q\,\frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3}$$

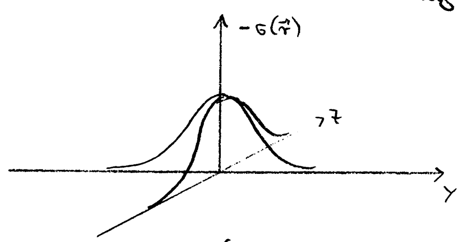
$$\rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}=(0,y,z)) = \frac{q}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[\begin{pmatrix} a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \frac{q}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das bedeutet: $\cdot\ \vec{\tau}\cdot\vec{E} = 0$ → die Feldlinien stehen $\perp$ auf der Metallplatte

$\cdot\ \vec{n}\cdot\vec{E} = -\dfrac{2aq}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ → damit folgt für die Oberflächenladungsdichte:

↓ $\vec{n}$ zeigt in $-x$ - Richtung

$$\boxed{\sigma(\vec{r}) = -\frac{aq}{2\pi}\,(a^2+y^2+z^2)^{-3/2}}$$



→ maximal bei $y = z = 0$

Gesamtladung auf der Metallplatte: $q_{infl} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\ \sigma(\vec{r}) = -q$

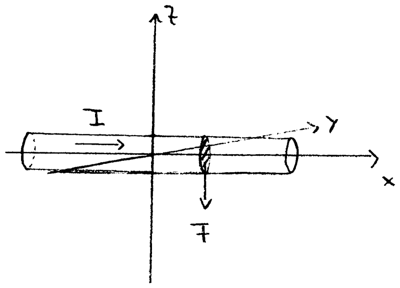
↪ „Influenzladung"

B.2 Magnetostatik

Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ ⇒ elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t)$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ ⇒ magnetisches Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ mit ?

Zunächst: Definition der Stromdichte



→ Strom durch einen Draht mit Querschnittsfläche $F = R^2\pi$

⇒ Strom = $\dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$, $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$

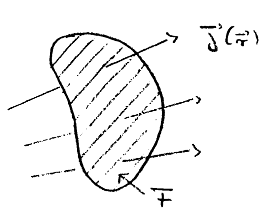
$$\text{Stromdichte} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} \quad , \quad j = \frac{I}{F}$$

Richtung des Stroms : hier $\to \vec{e}_x$ $\Rightarrow$ $\vec{j} = j\,\vec{e}_x$

$\to$ die Stromdichte ist ein Vektorfeld

hier : $\underbrace{\vec{j}(\vec{r},t)}_{\text{stationärer Strom}} = \vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} j\vec{e}_x & : \; y^2+z^2 \le R^2 \\ \vec{0} & : \; \text{sonst} \end{cases}$

$\to$ Berechnung des Stroms durch eine Fläche F für ein gegebenes $\vec{j}(\vec{r},t)$



$$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \qquad \text{Flächenintegral}$$

speziell für $\vec{j} \parallel \vec{F}$, $\vec{j}$ auf der Fläche konstant

$$\Rightarrow \quad I = \vec{j} \cdot \vec{F} = j F \quad ✓$$

Strom = bewegte Ladung

gegeben : Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$

Annahme : die Bewegung der Ladungsverteilung wird durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ beschrieben

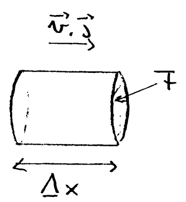
dann gilt : $\boxed{\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)}$ (*)

Beispiel : Strom durch einen Draht (wie oben)

$$\rho(\vec{r},t) = \begin{cases} \rho_0 & : \; y^2+z^2 \le R^2 \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{r},t) = v\,\vec{e}_x = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 v\,\vec{e}_x & : \; y^2+z^2 \le R^2 \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad j = \rho_0 v$$

und damit $I = jF = \rho_0 v F \underset{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}{=} \rho_0 \underbrace{\Delta x\, F}_{=\Delta V} \frac{1}{\Delta t} = \underbrace{\rho_0 \Delta V}_{\Delta q} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

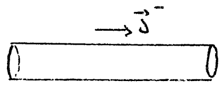


Δq : die im Volumen ΔV enthaltene Ladung

= die Ladung, die in der Zeit Δt die Fläche F durchströmt

Gl. (*) gilt nicht, falls ...

Beispiel: metallische Draht



$$\rho(\vec{r},t) = \underset{\downarrow}{\rho^+(\vec{r},t)} + \underset{\downarrow}{\rho^-(\vec{r},t)} = 0$$

Ladungsdichten der positiven/negativen Ladungen

es gilt: $\vec{v}^+(\vec{r},t) = \vec{0}$: die positiven Ladungen ruhen

$\vec{v}^-(\vec{r},t) = \vec{v}^- \neq \vec{0}$

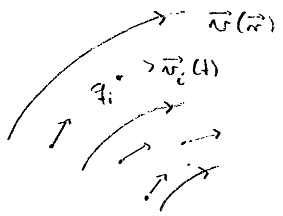
$$\rightarrow \vec{j}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{j}^+(\vec{r},t)}_{\substack{= \rho^+(\vec{r},t)\,\vec{v}^+ \\ = \vec{0}}} + \underbrace{\vec{j}^-(\vec{r},t)}_{= \rho^-(\vec{r},t)\,\vec{v}^-} \neq \underbrace{\rho(\vec{r},t)}_{=0}\,\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

Stromdichte einer diskreten Ladungsverteilung

Ausgangspunkt: $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r})$ (stationäres Geschwindigkeitsfeld)

mit $\rho(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))$

↳ beschreibt Punktladungen q_i an den Orten $\vec{r}_i(t)$



$$\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) \overset{!}{=} \vec{v}(\vec{r}_i(t))$$

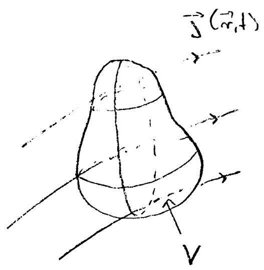
d.h. alle Punktladungen bewegen sich in einem Geschwindigkeitsfeld

$$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\underbrace{\vec{v}(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))}_{= \vec{v}(\vec{r}_i(t))\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))}$$

und damit

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{v}_i(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))}$$

Kontinuitätsgleichung



→ Strom I durch Oberfläche F_V des Volumens V

es gilt:

$$I = \oint_{F_V} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{f} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß'scher Satz}}}{=} \int_V dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$

außerdem : $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ mit $\Delta q = -\left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)$

· mit $q(t)$ der im Volumen V zur Zeit t enthaltenen Ladung (Vorzeichen)

$\rightarrow \quad q(t) = \int_V dV \, \rho(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\int_V dV \, \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\rho(\vec{r}, t+\Delta t) - \rho(\vec{r},t)\right]}_{= \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)}$$

und damit : $\int_V dV \, \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = -\int_V dV \, \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)$

gilt für beliebige $V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$ Kontinuitätsgleichung

im statischen Fall : $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$

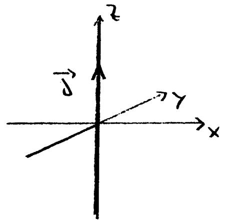
Magnetfeld

eine stationäre Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ erzeugt ein Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ gemäß :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}} \quad (*)$$

Beispiel : Magnetfeld eines (unendlich dünnen) Drahts mit der Stromdichte

$\vec{j}(\vec{r}) = j\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z$



Einsetzen in $(*)$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j\,\delta(x')\,\delta(y') \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -j\,\delta(x')\,\delta(y')\,(y-y') \\ j\,\delta(x')\,\delta(y')\,(x-x') \\ 0 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{j}{c}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} = \dots$$

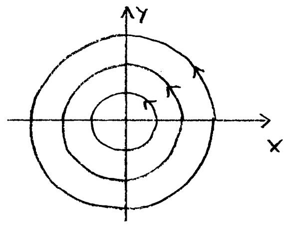
verwende Zylinderkoordinaten ρ, φ, z $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \, \vec{e}_\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\ldots = \frac{j}{c} \rho \, \vec{e}_\varphi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \frac{1}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}}}$$

Substitution: $z'' = z - z'$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz'' \, \frac{1}{[\rho^2 + z''^2]^{3/2}} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{z''}{[\rho^2 + z''^2]^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2j}{c} \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}}$$



$\longrightarrow$ Feldlinien sind Kreise um die z-Achse

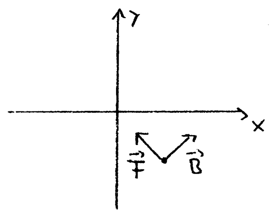
Kraft auf eine Punktladung

betrachte Punktladung q_i am Ort $\vec{r}_i$, Geschwindigkeit $\vec{v}_i$, im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$

$\longrightarrow$ Kraft auf die Punktladung $\boxed{\vec{F}_i = \frac{1}{c} q_i \, \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)}$

Beispiel: $\vec{B}(\vec{r}) = \alpha \, \vec{e}_\varphi$, $\vec{v}_i = v \, \vec{e}_z$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_i = \frac{\alpha}{c} q_i v \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi}_{= -\vec{e}_\rho}$$



Vektorpotential

ausgehend von Gl. (*) für $\vec{B}(\vec{r})$ $\longrightarrow$ es gilt $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \, \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]}$$

$$= - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

folgt aus $\vec{\nabla} \times (\vec{a} f(\vec{r})) = - \vec{a} \times \vec{\nabla} f(\vec{r})$

$$= \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left[\frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

mit dem Vektorpotential $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})}$

mit $\Lambda(\vec{r})$ einem beliebigen skalaren Feld

$\longrightarrow$ der Term $\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$ trägt nicht zu $\vec{B}(\vec{r})$ bei, da $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})) = \vec{0}$

d.h.: das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld bestimmt!

Festlegung von $\vec{A}(\vec{r})$ bzw. $\Lambda(\vec{r})$ = Eichung

- Eichtransformation : $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$

<u>Beispiel:</u> Coulombeichung

$\longrightarrow$ setze $\Lambda(\vec{r}) = 0$, diese Wahl führt zu $\boxed{\operatorname{div}\vec{A}'(\vec{r}) = 0}$

denn: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}_{= \vec{j}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}))}_{= \Delta\Lambda(\vec{r}) = 0 \text{ wegen } \Lambda(\vec{r}) = 0} = \ldots$$

es gilt : $$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\ldots = -\frac{1}{c}\underbrace{\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

partielle Integration: $$= \underbrace{\oint \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}')\cdot d\vec{f}} - \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\cdot\vec{j}(\vec{r}')}_{=0} \quad \checkmark$$

verschwindet, falls $\vec{j}(\vec{r})$ auf endliches Raumgebiet beschränkt

<u>Grundgleichungen der Magnetostatik</u>

- Divergenz des Magnetfelds :

aus $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})$ folgt $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r})) = 0$

$\rightarrow$ Wirbelfelder sind quellenfrei

- Rotation des Magnetfelds :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \ldots$$

verwende die Coulombeichung für das Vektorpotential :

$\rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\rightarrow$ $\Lambda(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\ldots = -\frac{1}{c}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\,\Delta_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \ldots$$

es gilt : $\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) = - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} =$

$= - 4\pi \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ (siehe Übungen)

$\ldots = \frac{4\pi}{c} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$

damit folgt für die Grundgleichungen der Magnetostatik :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned}}$$

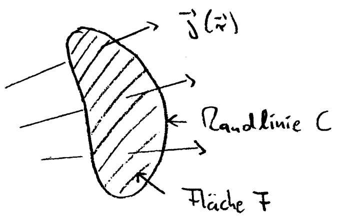
$\rightarrow$ es gibt keine magnetischen Monopole

alternativ : Grundgleichung für das Vektorpotential

in der Coulombeichung gilt : $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = - \Delta \vec{A}(\vec{r})$

$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A}(\vec{r}) = - \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})}$ das Magnetfeld folgt dann aus $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$

Ampère - Gesetz



es gilt $\boxed{I_F = \frac{c}{4\pi} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}}$

d.h. Strom durch die Fläche F = Linienintegral über den Rand der Fläche

folgt aus : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_F \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})} \cdot d\vec{f} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}}_{= I_F}$ ✓

B.3 Maxwellgleichungen

aus den Grundgleichungen der Elektrostatik und Magnetostatik folgt :

$\rightarrow$ keine Kopplung zwischen $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$

$\hookrightarrow$ gilt nicht mehr für zeitabhängige Vorgänge

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung der Feldgleichungen

Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\,\rho(\vec{r},t) & \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) & \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \end{array}}$$

$\rightarrow$ Grundgleichungen der Elektrodynamik

außerdem: Lorentzkraft $\boxed{\vec{F}_L = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right)}$

$\rightarrow$ Kraft auf eine Punktladung q am Ort $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, im elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und magnetischen Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$

Diskussion der Zusatzterme

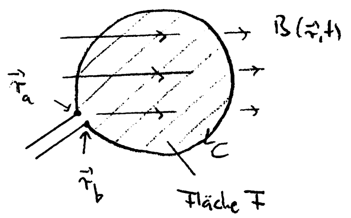
1. $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)$: Induktion

Maxwell-Gleichung: $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \quad \Big| \int_F d\vec{F}\cdot\ldots$

$$\underbrace{\int_F (\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t))\cdot d\vec{F}}_{\underset{\text{Stokes}}{=}\oint_C \vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_F \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{F}}_{=\Phi_F(t)}$$

$\Phi_F(t)$: magnetischer Fluss durch die Fläche F

Weg C $\rightarrow$ Drahtschleife



$$\int_{\vec{r}_a,C}^{\vec{r}_b} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\left(\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\right) = U$$

U: Spannung zwischen den Punkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$

$\Rightarrow$ Faradaysches Induktionsgesetz $\boxed{U = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_F}{dt}}$

d.h. die zeitliche Änderung des Flusses durch die Drahtschleife induziert eine Spannung

$\hookrightarrow$ – Änderung von $\vec{B}(\vec{r},t)$

oder: – Bewegung der Schleife

2. $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)$: Verschiebungsstrom

folgt aus der Konsistenz der Maxwellgleichungen mit der Kontinuitätsgleichung

schreibe : $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) - \vec{f}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \qquad (*)$

zu zeigen : $f(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)$

$\longrightarrow$ bilde $\vec{\nabla}\cdot(*)$:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t))}_{=0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)}_{= -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)}$$

$\leftarrow$ Kontinuitätsgleichung

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\rho(\vec{r},t)}_{=\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)}$$

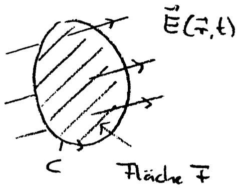
$\leftarrow$ Maxwell - Gleichung

und damit $\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\vec{f}(\vec{r},t)} = \vec{\nabla}\cdot\left[\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)}\right]$

identisch (bis auf ein Wirbelfeld)

experimentelle Begründung des Zusatzterms

Maxwell-Gleichung für $\vec{j}(\vec{r},t) = \vec{0}$: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)$



zeitliche Änderung des elektrischen Flusses erzeugt ein Magnetfeld

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\Phi_F^{el}(t)$$

A. Dynamik des elektromagnetischen Feldes

A1. elektromagnetische Wellen

Ausgangspunkt sind die Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{array}}$$

$\downarrow$ homogene Maxwell-Gln.
$\rightarrow$ enthalten keine Quellen

$\downarrow$ inhomogene Maxwell-Gln

alle auftretenden Felder sind Funktionen von $(\vec{r},t)$: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$ etc.
$\hookrightarrow \vec{B}, \vec{E}, \rho, \vec{j}$

$\vec{B}$: magnetisches Feld

$\vec{E}$: elektrisches Feld

ρ : Ladungsdichte

$\vec{j}$: Stromdichte

c : Lichtgeschwindigkeit

$\vec{\nabla}$: Nabla-Operator $\quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$; $\vec{r} = (x,y,z)$

typische Aufgabe:

$\rightarrow$ ρ und $\vec{j}$ sind vorgegeben

$\Rightarrow$ berechne die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ über die Lösung der Maxwell-Gln

d.h. Lösung gekoppelter, partieller Differentialgleichungen $\rightarrow$ schwierig

- „einfache" Beispiele:

a) Elektostatik, d.h. $\vec{B} = 0$; alle Zeitableitungen $= 0$; $(\vec{j} = 0)$

$\Rightarrow$ Feldgleichungen der Elektostatik

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{array}}$$

ρ vorgegeben, $\vec{E}$ gesucht

b) Magnetostatik, d.h. $\vec{E} = 0$; alle Zeitableitungen $= 0$

$\Rightarrow$ Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}}$$

betrachte nun: $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

in der Elektostatik bzw. Magnetostatik bedeutet dies $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = 0$

aber: es gibt Lösungen der (vollen) Maxwellgleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ mit $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$! $\rightarrow$ elektomagnetische Wellen

Behauptung:

für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ sind die ebenen Wellen der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \end{aligned}}$$

Lösungen der Maxwellgleichungen

- $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ beliebig
- die Amplituden $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ sind unabhängig von $\vec{r}$ und t

Beweis $\rightarrow$ Einsetzen in die Maxwellgleichungen

berechne zunächst $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r},t) \\ E_y(\vec{r},t) \\ E_z(\vec{r},t) \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial x} E_{0,x}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} = E_{0,x}\, e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{ik_y y} e^{ik_z z} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} e^{ik_x x}}_{= ik_x e^{ik_x x}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{(E_{0,x}\,ik_x + E_{0,y}\,ik_y + E_{0,z}\,ik_z)}_{=\,i\,\vec{E}_0\cdot\vec{k}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

analog: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = i\,\vec{B}_0\cdot\vec{k}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0,x}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E_{0,y}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ E_{0,z}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{pmatrix} = \ldots$$

erste Komponente: $\underbrace{\left[E_{0,z}\,ik_y - E_{0,y}\,ik_z\right]}_{=\text{ erste Komponente von } i\,\vec{k}\times\vec{E}_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\ldots = i\,\vec{k}\times\vec{E}_0\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

analog: $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = i\,\vec{k}\times\vec{B}_0\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

Einsetzen in die Maxwellgleichungen

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\,\vec{E}_0\cdot\vec{k}\; \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{\neq 0} = 0$

  $\Rightarrow \quad \vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0 \quad$ d.h. $\quad \vec{E}_0 \perp \vec{k}$

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0\cdot\vec{k} = 0 \quad$ d.h. $\quad \vec{B}_0 \perp \vec{k}$

- $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$

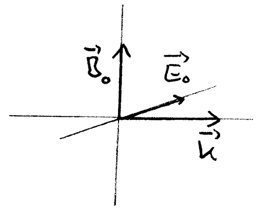
  $\Rightarrow \quad \left[i\,\vec{k}\times\vec{E}_0 - \frac{i\omega}{c}\vec{B}_0\right] \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_{\neq 0} = 0$

  $\Rightarrow \quad \boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\omega}{c}\vec{B}_0}\,(*) \quad$ d.h. $\quad \vec{B}_0 \perp \vec{k} \quad$ und $\quad \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$

$\rightarrow$ $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$ bilden ein orthogonales Dreibein

z.B. $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{kc}{\omega} E_0 \end{pmatrix}$$



- $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[i \vec{k} \times \vec{B}_0 + \frac{i\omega}{c} \vec{E}_0 \right]}_{=0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0 \quad \text{Einsetzen in } (*)$$

$$\rightarrow -\frac{c}{\omega} \underbrace{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{B}_0)}_{= \vec{k} (\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{B}_0}_{=0}) - \vec{B}_0 (\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{=k^2})} = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0$$

$$k^2 \vec{B}_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}_0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$k = \frac{|\omega|}{c}$$

wg

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

Was folgt daraus?

$\rightarrow$ Der Ansatz mit ebenen Wellen für $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ ist eine Lösung der Maxwellgleichungen für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ sofern

- $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$, $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$
- $\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0$
- $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

außerdem gilt:

$$|\vec{B}_0| = \frac{c}{|\omega|} \underbrace{|\vec{k} \times \vec{E}_0|}_{= |\vec{k}| \cdot |\vec{E}_0|, \text{ da } \vec{k} \perp \vec{E}_0} = \frac{c}{|\omega|} k \, |\vec{E}_0| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|$$

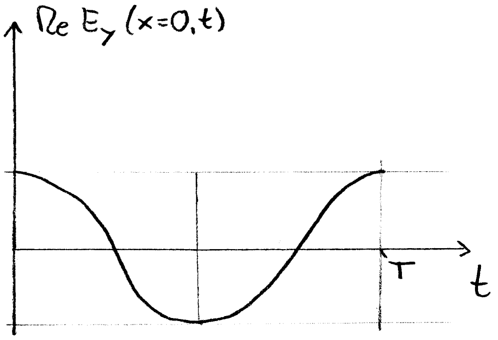
Frequenz und Wellenlänge

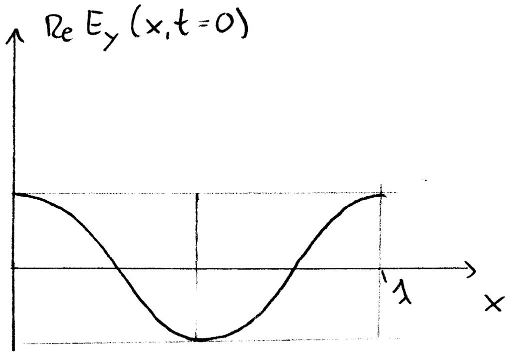
sei $\vec{k} = (k,0,0)$; $\vec{E}_0 = (0,E_0,0)$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\cos(kx-\omega t) + i \sin(kx-\omega t) \right]$$

physikalisches Feld: $\quad \mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kx-\omega t)$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Re}\,E_y(x,t) = E_0 \cos(kx-\omega t)$$





$\omega T = 2\pi$

Kreisfrequenz $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Frequenz $\quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$k\lambda = 2\pi$

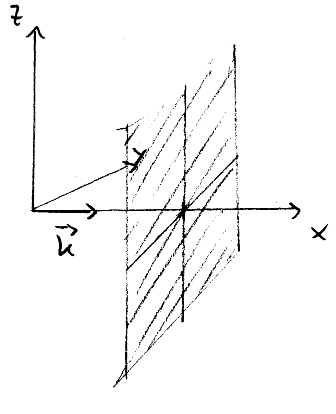
Wellenlänge $\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu} = Tc$

Warum "ebene" Welle

Flächen konstanter Phase φ sind Ebenen

für $k = (k,0,0) \quad \Rightarrow \quad \varphi = kx - \omega t$

gesucht: alle Vektoren $\vec{r}$ mit $\varphi = kx - \omega t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t) \\ y,z \text{ beliebig} \end{cases}$



Ebenen mit konstanter Phase φ bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\vec{k}$-Richtung

$$x = \frac{\varphi}{k} + \frac{\omega}{k} t = \frac{\varphi}{k} + ct$$

Kugelwelle

Phase $\varphi = kr - \omega t \qquad r = |\vec{r}|$

Flächen konstanter Phase definiert durch $r = \frac{1}{k}(\varphi + \omega t)$

$\rightarrow$ konzentrische Kugeloberflächen

Polarisation

eine monochromatische, ebene Welle mit $\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$ ist in

y-Richtung linear polarisiert $\rightarrow$ Richtung von $\vec{E}(\vec{r},t)$ für alle $\vec{r},t$ gleich

betrachte jetzt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\vec{E}_{0,1} + \vec{E}_{0,2})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

mit $\vec{E}_{0,1} = (0, E_{01}, 0)$, $\vec{E}_{0,2} = (0, 0, E_{02})$

die E_{0i} sind komplexwertig, d.h. $\quad E_{0i} = |E_{0i}|\, e^{i\varphi_i} \qquad i = 1,2$

$$\Rightarrow E_{0i}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = |E_{0i}|\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_i)}$$

physikalisches Feld:
$$\mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_{01}| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ |E_{02}| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

sei $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |E_{01}| \\ |E_{02}| \end{pmatrix} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

d.h. das elektrische Feld ist in Richtung $(0, |E_{0,1}|, |E_{02}|)$ linear polarisiert

sei $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

außerdem: $|E_{01}| = |E_{02}| = a$

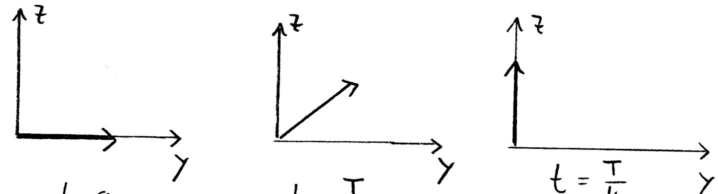
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \vec{E}(\vec{r},t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ -\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

- $|\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t)|^2 = a^2$ unabhängig von $\vec{r},t$
- Richtung hängt aber von $\vec{r},t$ ab

setze z.B. $\vec{r} = 0$, $\varphi_1 = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r}=0,t) = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-\omega t) \\ -\sin(-\omega t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$



$t = 0$ $\quad$ $t = \frac{T}{8} = \frac{1}{8\nu} = \frac{2\pi}{8\omega} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $t = \frac{T}{4}$

$\Rightarrow$ Welle ist zirkular polarisiert

Überlagerung elektromagnetischer Wellen

Behauptung: eine Überlagerung elektromagnetischer Wellen mit verschiedenen $\vec{k}$-Vektoren der Form

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_0(\vec{k}_i)\, e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k}_i)\,t)}}$$

oder

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\, \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}}$$

$\vec{B}(\vec{r},t)$ jeweils analog

ist ebenfalls eine Lösung der Maxwellgleichungen für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$

Beweis: Maxwellgleichungen sind linear!

z.B. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2(\vec{r},t)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\int d^3k\, \vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right] = \int d^3k\, \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_0(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}\right]}_{= \ldots}$$

$$\dots = i\,\vec{E}_0(\vec{k})\cdot\vec{k}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(\vec{k})t)}$$

es soll gelten: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = 0$ für alle $\vec{r},t$

$$\Rightarrow \vec{E}_0(\vec{k}) \perp \vec{k} \quad \text{für jedes } \vec{k}$$

außerdem: $\vec{B}_0(\vec{k}) = \frac{c}{\omega(\vec{k})}\vec{k}$

$$k^2 = \frac{1}{c}\,\omega(\vec{k})^2 \quad \longrightarrow \quad \omega(\vec{k}) = kc$$

<u>endliche Wellenpakete</u>

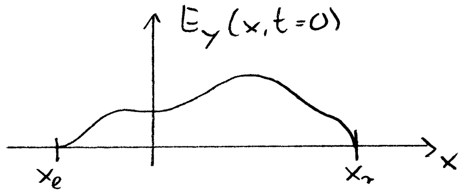
zur Vereinfachung: i, setze $\vec{k} = (k,0,0) \quad \Rightarrow \int d^3k \sim \int_{-\infty}^{\infty} dk$

ii, alle $\vec{E}_0(\vec{k})$ in y-Richtung, d.h.

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = (0, E_0(k), 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

zur Zeit $t=0$ sei $E_y(x,t=0)$ vorgegeben



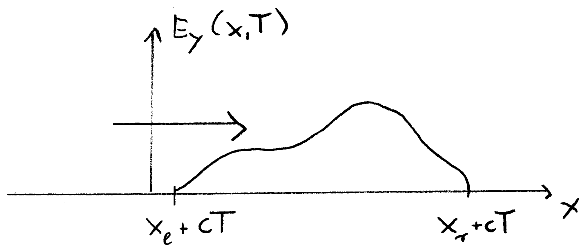
$$\Rightarrow \quad \boxed{E_y(x,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{ikx}}$$

$E_0(k)$ ist die Fourier-Transformierte von $E_y(x,t=0)$:

$$\boxed{E_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_y(x,t=0)\, e^{-ikx}\, dx}$$

das Wellenpaket bewegt sich mit Geschwindigkeit c in $\vec{k}$-Richtung!

$$\longrightarrow \text{betrachte } E_y(x,T) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, \underbrace{e^{i(kx-kcT)}}_{=\,e^{ik(x-cT)}} \stackrel{!}{=} E_y(x-cT,0)$$



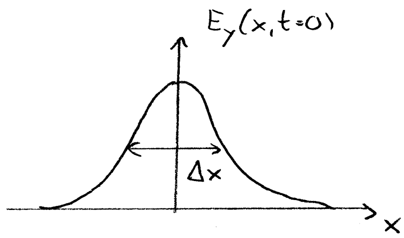
die Form des Wellenpakets ändert sich nicht!

warum?

Frequenz-Spektrum eines Wellenpakets

Beispiel: Gaußsches Wellenpaket

$$E_y(x, t=0) = a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2}$$



$$\Rightarrow \quad E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2} e^{-ikx}\, dx$$

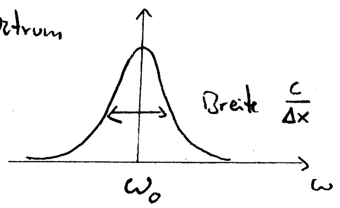
$$= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta x\, e^{-\frac{1}{2}(k \Delta x)^2}$$ $\longrightarrow$ ebenfalls eine Gaußverteilung, Breite $\frac{1}{\Delta x}$

Zeitentwicklung des Wellenpakets

$$E_y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, E_0(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

jeder Beitrag zum Integral mit Wellenzahl k $\rightarrow$ Frequenz $\omega(k) = kc$

$\Rightarrow$ Frequenz-Spektrum



Für $\Delta x \to \infty$:

$\frac{c}{\Delta x} \to 0$: monochromatische Welle

Unschärfe-Relation

$$\underbrace{\text{Breite des Wellenpakets im Orts-Raum}}_{\Delta x} \cdot \underbrace{\text{... im } k\text{-Raum}}_{\frac{1}{\Delta x}} \geq \text{const}$$

Warum zerfließt das Wellenpaket nicht?

$\longrightarrow$ lineare Dispersion $\boxed{\omega(k) = kc}$

betrachte $(kx - \omega(k)t) = k\left(x - \frac{\omega(k)}{k} t\right)$

jeder Anteil zum Integral bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{\omega(k)}{k}$

im Folgenden $\rightarrow$ Zeitentwicklung, d.h. die Bewegung mit Geschwindigkeit c, läßt sich direkt aus der Struktur der Maxwellgleichungen ablesen nochmals:

die Maxwellgleichungen für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (3) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ (2) & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & (4) & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array}}$$

bilde: $-\vec{\nabla} \times [\,\text{Gl. (2)}\,]$:

$$-\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})} - \underbrace{\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right]} = 0$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}} \underset{(4)}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \; = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\underset{(3)}{= 0}} - \Delta \vec{E}$$

also: $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Box \vec{E} = 0}$$

mit dem d'Alembet-Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

analog für das Magnetfeld: $\boxed{\Box \vec{B} = 0}$.

setze im folgenden $\vec{k} = (k, 0, 0)$

$\rightarrow$ wie in den Beispielen zuvor soll $\vec{E}$ nur von (x, t) abhängen: $\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}(x, t)$

d.h. $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ergeben 0

und es folgt:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(x, t) = 0} \quad (*)$$

<u>Behauptung</u>: für eine beliebige Funktion f gilt $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x \pm ct) = 0$

d.h. eine explizite Lösung der Dgl. $(*)$ ist nicht notwendig

$\rightarrow$ beliebige Wellenpakete $f(x)$ (zur Zeit $t=0$) bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\pm x$-Richtung

<u>Beweis:</u> sei $a(x,t) = x + ct$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a(x,t)) = \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2}\underbrace{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2}_{=1} + \frac{df}{da}\underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}}_{=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a(x,t)) = \frac{df}{da}\frac{\partial a}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2}\underbrace{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2}_{=c^2} + \frac{df}{da}\underbrace{\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(a(x,t)) = \frac{d^2 f}{da^2} - \frac{c^2}{c^2}\frac{d^2 f}{da^2} = 0 \quad \text{für jede Funktion } f(a)$$

<u>Hinweis:</u> Maxwellgleichungen für die Potentiale

$$\boxed{\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \quad \Box \Phi = -4\pi\rho}$$

d.h. die Lösungen für die Potentiale haben ebenfalls die Form

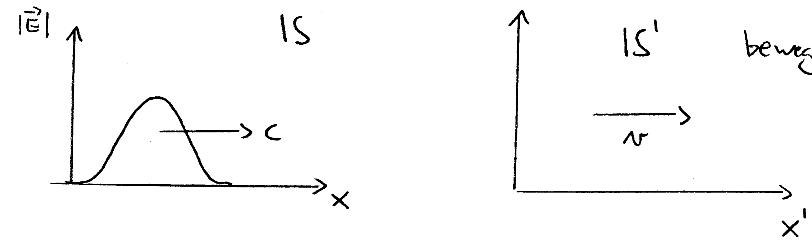
$$\vec{A}(x,t) = \vec{a}^{(r)}(x-ct) + \vec{a}^{(l)}(x+ct)$$
$$\Phi(x,t) = \phi^{(r)}(x-ct) + \phi^{(l)}(x+ct)$$

elektrische und magnetische Felder ergeben sich daraus über:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

<u>Fazit von Kap. A.1</u>

Es existieren Lösungen der Maxwellgleichungen für den feldfreien Fall, die sich in dem Inertialsystem, in dem die Maxwellgleichungen definiert sind, mit Geschwindigkeit c ausbreiten.



IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v in x-Richtung

$\Rightarrow$ Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Wellenpaket in IS' ?

Galilei-Transformation : $c' = c - v$

<u>aber</u>: Licht breitet sich in jedem IS mit der gleichen Geschwindigkeit c aus → Maxwellgleichungen gelten in jedem IS

beim Übergang von IS → IS'

Maxwellgleichungen sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen

A.2 Spezielle Relativitätstheorie

A.2.1 Einführung

<u>Relativitätsprinzip</u> (Galilei): 1. Alle Inertialsysteme sind gleichwertig

2. Die Newtonschen Axiome gelten in allen Inertialsystemen

gleichwertig heisst: <u>alle</u> grundlegenden physikalischen Gesetze haben in allen IS die gleiche Form

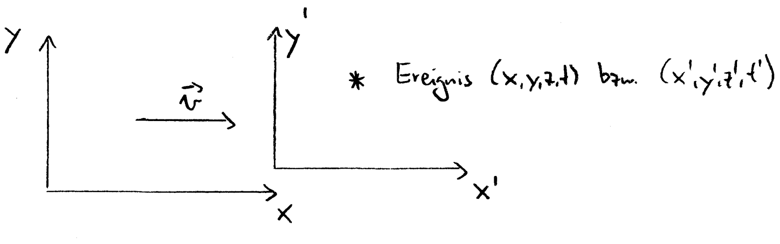
im folgenden: Punkt 1 ok

Punkt 2 wird modifiziert

⇒ (u.a.) die Begriffe Raum und Zeit verlieren teilweise ihre absolute Bedeutung

<u>Ereignis</u>: definiert durch die Angabe der Koordinaten (x, y, z, t) in einem bestimmten Inertialsystem IS

→ Wie lauten die Koordinaten dieser Ereignisse in einem relativ zu IS mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Inertialsystem IS'? → (x', y', z', t')



Galileitransformation für $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$x' = x - vt \,, \quad y' = y \,, \quad z' = z \,, \quad t' = t$$

<u>Bewegung eines Photons in IS und IS'</u>:

Zur Zeit $t = t' = 0$ wird ein Photon vom Ursprung von IS (= Ursprung von IS') ausgesandt.

$\rightarrow$ Position des Photons in IS : (x,t)
in IS' : (x',t')

Annahme : das Photon bewege sich in IS' mit der Geschwindigkeit c
d.h. $\frac{dx'}{dt'} = c$, $x' = ct'$

$\Rightarrow$ (Galilei-Transformation) $x = x' + vt = ct' + vt = ct + vt = (c+v)t$

$$\frac{dx}{dt} = c + v$$

d.h. in IS hat das Licht die Geschwindigkeit $c+v$

dies steht aber im Widerspruch zur experimentellen Tatsache ($\rightarrow$ Michelson-Versuch)
Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$\Rightarrow$ Relativitätsprinzip (Einstein) : 1. Alle IS sind gleichwertig
2. Licht pflanzt sich in jedem IS mit Geschwindigkeit c fort

aus 2 folgt : die Maxwell-Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen

Abstand von Ereignissen

betrachte zwei Ereignisse : (t_1, x_1, y_1, z_1) und (t_2, x_2, y_2, z_2)

Def.: Quadrat des Abstands zwischen den Ereignissen

$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Beispiele:

- $t_2 = t_1$; $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, oder $z_1 \neq z_2$ $\Rightarrow$ $S_{12}^2 < 0$
- Ereignis 1 : $(0,0,0,0)$
  Ereignis 2 : $(\pm\frac{x}{c}, x, 0, 0)$ $\Big\}$ $S_{12}^2 = c^2 \frac{x^2}{c^2} - x^2 = 0$

Koordinaten der beiden Ereignisse in IS' : (t_1', x_1', y_1', z_1') und (t_2', x_2', y_2', z_2')

Abstand in IS' : $S_{12}'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$

speziell: Ereignis 1 : Emission eines Photons $\longrightarrow$ $(0,0,0,0)$ in IS und IS'

Ereignis 2 : Absorption dieses Photons $\longrightarrow$ (t,x,y,z) in IS

(t',x',y',z') in IS'

Photon bewegt sich mit Geschwindigkeit $v = \frac{1}{t}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = c$

$\Rightarrow \quad c^2t^2 = x^2+y^2+z^2 \quad$ d.h. $s_{12}^2 = 0$

dies gilt ebenso in IS' !

$\Rightarrow \quad c^2t'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 \quad$ d.h. $s_{12}'^2 = 0$

allgemein (nicht nur für Photonen) gilt: $\boxed{s_{12}'^2 = s_{12}^2}$

betrachte jetzt ein gleichförmig bewegtes Teilchen

Ereignis 1 : $(0,0,0,0)$ in IS und IS'

Ereignis 2 : $(t,x,0,0)$ in IS $\longrightarrow$ $x = vt$: $(t, vt, 0,0)$

$(t',x',0,0)$ in IS'

Abstand dieser beiden Ereignisse in IS : $s_{12}^2 = (c^2-v^2)t^2$

Frage: wie lauten die Koordinaten von Ereignis 2 in IS', damit gilt:

$$s_{12}'^2 = c^2t'^2 - x'^2 \stackrel{!}{=} s_{12}^2 = (c^2-v^2)t^2 \quad ?$$

d.h. welche Transformation (Koordinaten in IS) $\longrightarrow$ (Koordinaten in IS')

ändert das Abstandsquadrat nicht?

A.2.2

Lorentztransformationen

Schreibweise : $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

Achtung: Indizes oben

Definition:
$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Abstand zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

Achtung: Summenkonvention $\rightarrow$ über zwei gleiche Indizes (einer unten, einer oben) wird summiert

es soll gelten: $\boxed{ds'^2 = ds^2}$ $(*)$

im folgenden: Aufstellen der Transformation, die die Gl. $(*)$ erfüllt

Ansatz: $\boxed{x'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x^\beta + b^\alpha}$ Lorentztransformation

$\Lambda^\alpha_{\ \beta}, b^\alpha$ hängen von der Relation zwischen IS und IS' ab
nicht von den Koordinaten

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

bzw. $x' = \Lambda x + b$ mit $x' = (x'^\alpha)$, $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{\ \beta})$, ...

es gilt: $\boxed{dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta}\, dx^\beta}$

Beweis: betrachte $\Delta x'^\alpha = x_1'^\alpha - x_2'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta} x_1^\beta + b^\alpha - \Lambda^\alpha_{\ \beta} x_2^\beta - b^\alpha$

$$= \Lambda^\alpha_{\ \beta} (x_1^\beta - x_2^\beta) = \Lambda^\alpha_{\ \beta} \Delta x^\beta$$

aus der Invarianz $ds'^2 = ds^2$ folgt damit:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta = \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_{\ \gamma} dx^\gamma \Lambda^\beta_{\ \delta} dx^\delta \stackrel{!}{=} ds^2 = \eta_{\gamma\delta}\, dx^\gamma dx^\delta}_{\text{diese Gleichung soll für beliebige } dx \text{ gelten}}$$

$\Rightarrow$ ...

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}}$$

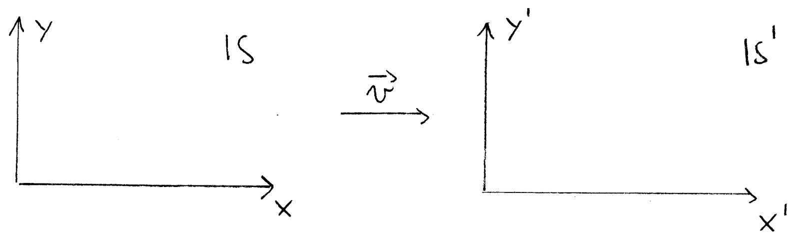
ausgeschrieben $\eta_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\gamma}_{=(\Lambda^T)_\alpha{}^\gamma} \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\delta = \underbrace{\left(\Lambda^T \eta \Lambda\right)_{\gamma\delta}}_{\text{Matrixprodukt}}$

die transponierte Matrix

$$\rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

das entspricht der Bedingung $\alpha^+ \alpha = 1$ bei orthogonalen Transformationen

Spezielle Lorentztransformation



Relativbewegung nur in x-Richtung

$\Rightarrow y = y'$
$z = z'$

das Ereignis: „der Ursprung von IS' befindet sich am Ursprung von IS" habe die Koordinaten $(ct, x, y, z) = (0,0,0,0)$ in IS und

$(ct', x', y', z') = (0,0,0,0)$ in IS'

$\rightarrow$ Einsetzen in $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + b^\alpha$

$0 = 0 + b^\alpha \qquad \Rightarrow b^\alpha = 0$

aus $x'^2 = x^2$ und $x'^3 = x^3$ folgt

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

betrachte die Folge von Ereignissen: „Position des Ursprungs von IS'"

Koordinaten in IS: $(ct, x, 0, 0) \stackrel{!}{=} (ct, vt, 0, 0)$

in IS': $(ct', 0, 0, 0)$

für diese Folge von Ereignissen gilt also:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} \qquad (*)$$

zunächst: die Matrixelemente von Λ sind nicht unabhängig

$\longrightarrow$ verknüpft durch $\Lambda^\alpha_{\ \gamma} \Lambda^\beta_{\ \delta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$

im relevanten Unterraum läßt sich diese Bedingung schreiben als:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 0} \\ \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^1_{\ 0})^2 & \Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 1} - \Lambda^1_{\ 0}\Lambda^1_{\ 1} \\ \Lambda^0_{\ 1}\Lambda^0_{\ 0} - \Lambda^1_{\ 1}\Lambda^1_{\ 0} & (\Lambda^0_{\ 1})^2 - (\Lambda^1_{\ 1})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

das ergibt drei Bedingungen

<u>Behauptung</u>: diese Bedingungen lassen sich erfüllen durch:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

<u>Beweis</u>: $\cosh\psi = \frac{1}{2}(e^\psi + e^{-\psi})$ es gilt: $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$

$\sinh\psi = \frac{1}{2}(e^\psi - e^{-\psi})$

a) $(\Lambda^0_{\ 0})^2 - (\Lambda^1_{\ 0})^2 = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ ✓

b) $(\Lambda^0_{\ 1})^2 - (\Lambda^1_{\ 1})^2 = \sinh^2\psi - \cosh^2\psi = -1$ ✓

c) $\Lambda^0_{\ 0}\Lambda^0_{\ 1} - \Lambda^1_{\ 0}\Lambda^1_{\ 1} = \cosh\psi \cdot (-\sinh\psi) - (-\sinh\psi)\cosh\psi = 0$ ✓

Einsetzen in $(*)$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix}$$

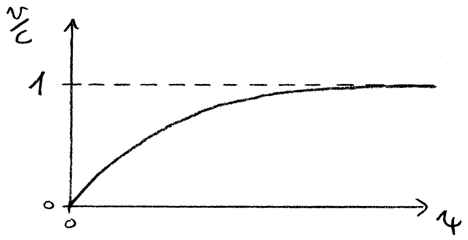
$\Rightarrow$ 2 Gleichungen: I $\quad ct' = ct\cosh\psi - vt\sinh\psi$

II $\quad 0 = -ct\sinh\psi + vt\cosh\psi$

aus II folgt: $\quad ct \sinh\psi = vt \cosh\psi$

$$\frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} = \tanh\psi = \frac{v}{c} \qquad \boxed{\psi = \operatorname{artanh}\frac{v}{c}}$$

↓ Rapidität



$$\frac{v}{c} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$\Rightarrow$ Einschränkung $\frac{v}{c} < 1$

spezielle LT für beliebige Ereignisse (ct, x, y, z)

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} , \quad y' = y , \quad z' = z}$$

mit $\psi = \operatorname{artanh}\frac{v}{c}$

Def.: $\quad \gamma = \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Beweis: $\quad \frac{v}{c} = \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\sinh^2\psi}{\cosh^2\psi} =$

$$= \frac{1}{\cosh^2\psi} \underbrace{(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi)}_{=1} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{ok}$$

außerdem: $\quad \frac{v}{c} = \frac{\sinh\psi}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \sinh\psi = \gamma\frac{v}{c}$

die spezielle LT hat damit die Form

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} , \quad y' = y , \quad z' = z}$$

ausgeschrieben

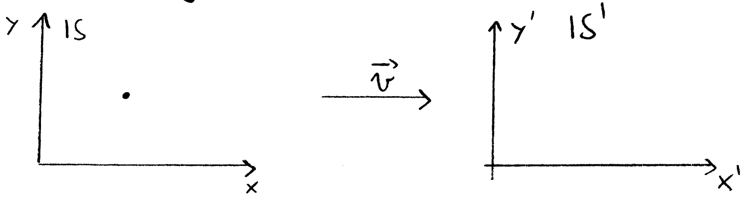
$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(ct - x\frac{v}{c} \right)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt)$$

$$y' = y \; ; \quad z' = z$$

Was haben wir bis jetzt erreicht?

$\longrightarrow$ betrachte ein Ereignis (ct, x, y, z) in IS



die (spezielle) Lorentztransformation $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta}$ ergibt die Koordinaten dieses Ereignisses in IS': (ct', x', y', z')

im folgenden: Verknüpfung verschiedener Ereignisse in IS und IS'

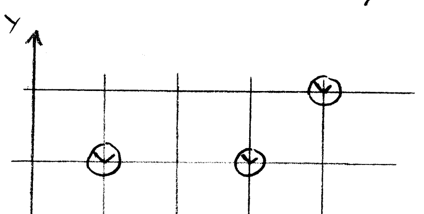
z.B.:
- Bahnkurve $\rightarrow$ Folge von Ereignissen
- Form von Objekten, z.B. ▭ $\longrightarrow$ Längenkontraktion
- bewegte Uhren $\longrightarrow$ Zeitdilatation

der Limes $v/c \ll 1$

$$\gamma \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x - vt \end{aligned}\right\} \text{Galileo-Transformation}$$

A.2.3 Längen- und Zeitmessung

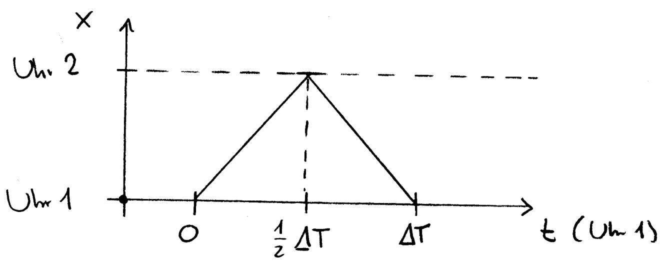
Koordinatennetz eines Inertialsystems IS



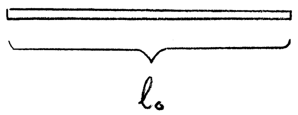
- realisiert durch ruhende, geeichte Längenmaßstäbe

außerdem: ruhende, gleichartige Uhren, die alle dieselbe IS-Zeit anzeigen

$\Rightarrow$ Synchronisation $\sim$ durch den Austausch von Signalen



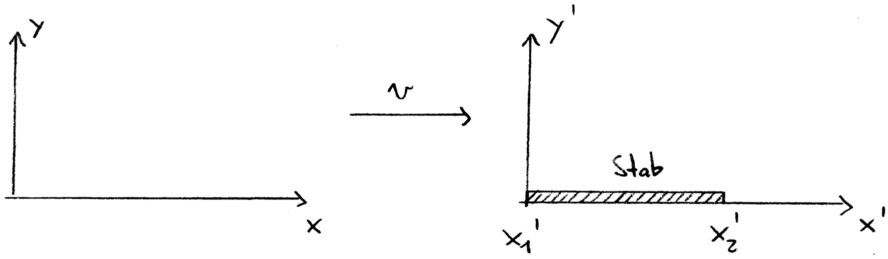
bewegte Maßstab



Stab ruht in einem Inertialsystem IS'
Messung der Länge in IS' ergibt die Eigenlänge l_0

die Eigenlänge ist unabhängig vom IS $\longrightarrow$ Lorentzskalar

jetzt: IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit v

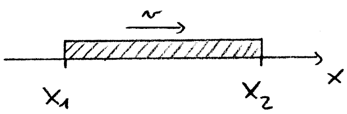


$\hookrightarrow \; l_0 = x_2' - x_1'$

Messung der Länge des Stabs in IS $\longrightarrow$ verlangt eine genaue Meßvorschrift!

$\longrightarrow$ markiere zur IS-Zeit $t=0$ die Position von Stabanfang und -ende auf der x-Achse $\longrightarrow$ 2 Ereignisse!

IS, $t=0$



Ereignis 1: $\begin{cases} x_1 = 0, & t_1 = 0 \\ x_1' = 0, & t_1' = 0 \end{cases}$ $\longleftarrow$ IS und IS' zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$ fallen zusammen

Ereignis 2: $\begin{cases} x_2, & t_2 = 0 \\ x_2' = l_0, & t_2' \end{cases}$

für diese spezielle Lorentztransformation gilt für beide Ereignisse

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - x\frac{v}{c}\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ erfüllt für Ereignis 1 für Ereignis 2 gilt:

$$ct_2' = \gamma\left(ct_2 - x_2 \frac{v}{c}\right) = -\gamma \frac{v}{c} x_2$$

$$x_2' = \gamma\left(x_2 - vt_2\right) = \gamma x_2 \overset{!}{=} l_0$$

$\Rightarrow$ Länge des Stabs in IS $\longrightarrow$ $l = x_2 - x_1 = x_2 = \frac{1}{\gamma} l_0$

Längenkontraktion $\boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad 0 \leq \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1$

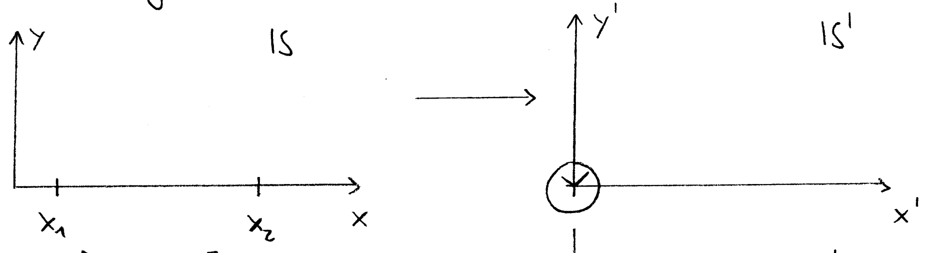
für t_2' folgt damit: $\quad ct_2' = -\gamma \frac{v}{c} \frac{1}{\gamma} l_0 = -\frac{v}{c} l_0 \leq 0$!

d.h. Ereignis 1 und 2 sind gleichzeitig in IS, aber <u>nicht</u> gleichzeitig in IS'

<u>Achtung:</u> die Längenkontraktion ist eine Aussage, die sich auf eine bestimmte Messvorschrift bezieht!

<u>bewegte Uhr</u>

betrachte den Gang einer in IS' ruhenden Uhr von IS aus



$\hookrightarrow$ Uhr ruht bei $x' = 0$, zeigt die IS'-Zeit t' an

an diesen Orten wird die t'-Anzeige abgelesen

$\longrightarrow$ definiere zwei Ereignisse

1: IS'-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$

Koordinaten $\quad x_1 = 0,\ t_1 = 0$

$\qquad\qquad\quad x_1' = 0,\ t_1' = 0$

2: IS'-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_2 = vt_2$ zur Zeit t_2

Koordinaten $\quad x_2 = vt_2,\ t_2$

$\qquad\qquad\quad x_2' = 0,\ t_2'$

spezielle Lorentz-Transformation

$\rightarrow$ für Ereignis 2: $\quad ct_2' = \gamma\,(ct_2 - x_2 \frac{v}{c})$

$$= \gamma\,(ct_2 - \frac{v^2}{c} t_2)$$

$$\Rightarrow \quad t_2' = t_2\,\gamma\,(1 - \frac{v^2}{c^2}) = t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

beim Ereignis 2 zeigt die bewegte Uhr: $\quad t_0 = t_2' - t_1' = t_2'$

= IS'-Zeitintervall zwischen E1 und E2

und eine IS-Uhr bei x_2: $\quad t = t_2 - t_1 = t_2$

= IS-Zeitintervall zwischen E1 und E2

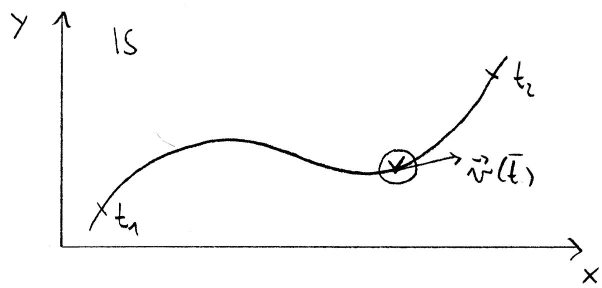
$\Rightarrow$ Zeitdilatation $\quad \boxed{t = t_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad$ d.h. $t > t_0$ für $v \neq 0$

d.h. die bewegte Uhr geht nach im Vergleich zu den IS-Uhren

Achtung: die verkürzte Aussage „eine bewegte Uhr geht langsamer" ist problematisch!

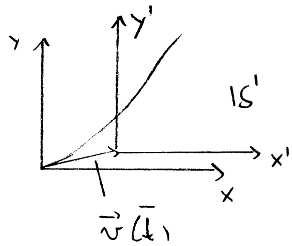
Eigenzeit

jetzt: eine Uhr bewegt sich relativ zu IS mit einer zeitabhängigen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$



welche Zeit zeigt die bewegte Uhr an?

für $t = \bar{t}$ $\rightarrow$ führe ein IS' ein, das sich mit der Konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}(\bar{t})$ relativ zu IS bewegt



zunächst: Zeitdilatation für Bewegung in beliebige Richtung:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$ Zeitintervall für IS'-Uhr $dt' = dt\sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2}$

$= d\tau$: Zeitintervall auf der bewegten Uhr

das gesamte Zeitintervall

$$\boxed{\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}$$

τ : Eigenzeit

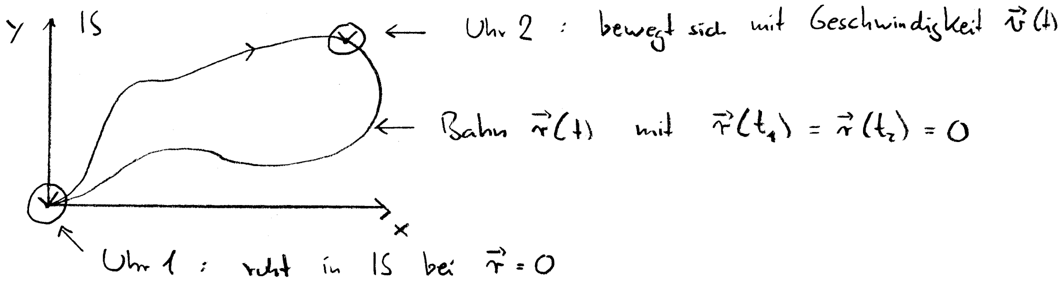
$\rightarrow$ ist eine von IS unabhängige Größe

- für $\vec{v}(t) = 0$ gilt:

$$\tau = t_2 - t_1$$

- für $\vec{v}(t) \neq 0$ gilt: $\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} < 1$

$$\Rightarrow \tau < t_2 - t_1$$



Anzeige der beiden Uhren zur IS-Zeit t_2 : Uhr 1 $\rightarrow t_2$

Uhr 2 $\rightarrow t_1 + \tau < t_2$

Gleichzeitigkeit

Frage: Inwieweit ist die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen willkürlich?

betrachte zwei Ereignisse:

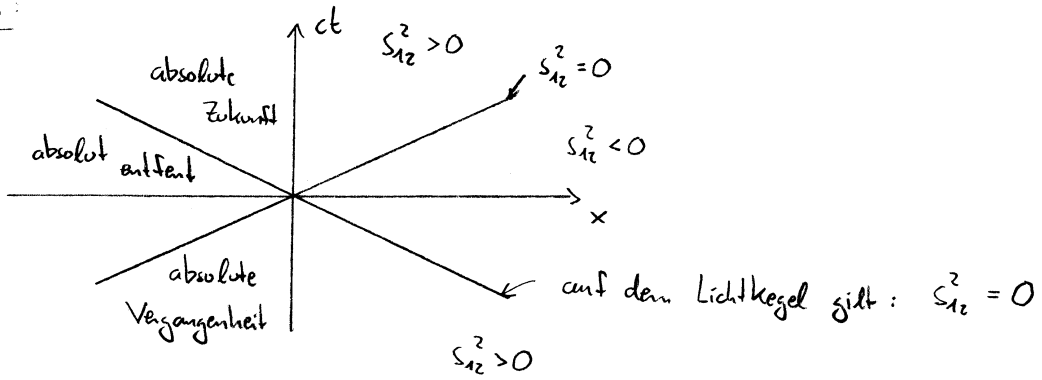
Ereignis 1 : $\begin{cases} x_1 = 0 , & t_1 = 0 \\ x_1' = 0 , & t_1' = 0 \end{cases}$ Ereignis 2 : $\begin{cases} x_2 = x , & t_2 = t \\ x_2' = x' , & t_2' = t' \end{cases}$

Abstand der beiden Ereignisse:

$$s_{12}^2 = c^2t^2 - x^2 \stackrel{!}{=} c^2t'^2 - x'^2 \begin{cases} = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ > 0 & \text{zeitartig} \end{cases}$$

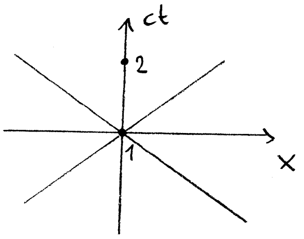
$\longrightarrow$ diese Klassifizierung ist unabhängig vom gewählten Inertial-system!

Darstellung in IS:



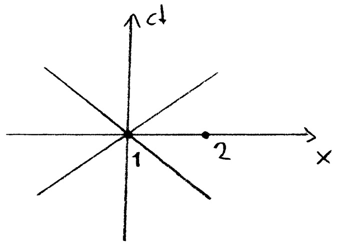
Beispiele:

- $x_2 = 0, \; t_2 = t \quad \Rightarrow \quad s_{12}^2 = c^2t^2 > 0 \;\sim$ zeitartig



  - E2 auf jeden Fall nach E1
  - die beiden Ereignisse können kausal zusammenhängen

- $x_2 = x, \; t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{12}^2 = -x^2 < 0 \;\sim$ raumartig



  - zeitliche Abfolge abhängig vom Inertialsystem
  - E1 und E2 können nicht kausal zusammenhängen

A.2.4 Lorentzgruppe, Lorentztensoren

allgemeine Galilei-Transformation zwischen zwei Inertialsystemen IS und IS'

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j - v_i t - a_i \qquad \text{und} \qquad t' = t - t_0$$

a_i, t_0 : konstante Verschiebung in Ort bzw. Zeit