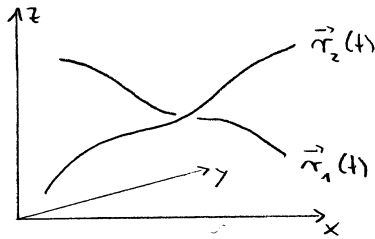


A. Klassische Mechanik

a1

A.1 Grundlagen der Newtonschen Mechanik

Kinematik von Massenpunkten \rightarrow Beschreibung der Bewegung von punktförmigen Körpern (Massen m_i) relativ zu einem Bezugssystem



dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem (KS)

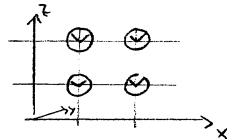
$$\vec{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)) \quad \vec{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$$

\hookrightarrow Ort des i -ten Teilchens zur Zeit t

Annahmen: - der gesamte Raum lässt sich durch ein solches KS beschreiben

- die Zeit t ist ein global definierter Parameter

\rightarrow Synchronisation von Uhren im gesamten Raum möglich



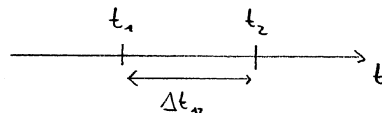
\rightarrow es gibt einen absoluten Gleichzeitkeitsbegriff

(existiert nicht mehr in der Relativitätstheorie!)

Ereignisse: Raum-Zeit Punkte $(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

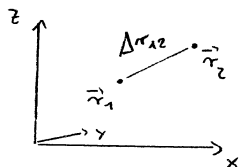
Abstand zweier Ereignisse $E_1: (\vec{r}_1, t_1)$ und $E_2: (\vec{r}_2, t_2)$

a, zeitliche Abstand



$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1$$

b, räumliche Abstand



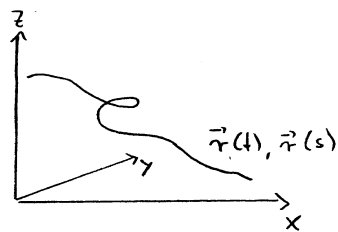
$$\Delta r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

$\vec{r}(t) \rightarrow$ Raumkurven, siehe Vorlesung Math. Methoden (MM)
Kap. VI.1 vektorwertige Funktion

Zu beachten: $\vec{r}(t)$: Beschreibung der Bahn eines Körpers

$\vec{r}(s)$: Beschreibung einer Kurve im Raum

\downarrow
Bogenlänge

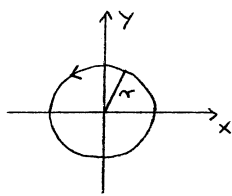


Ableitung von $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{pmatrix} = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \quad \bullet \text{ Geschwindigkeit}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{a}(t)$$

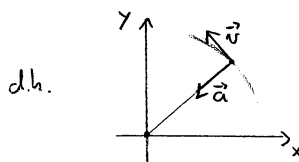
Beispiel: Kreisbahn



$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \omega r \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \omega^2 r \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$



die Newtonschen Axiome

Newton 1686/7 - Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

1. Axiom (Lex prima, Trägheitsgesetz)

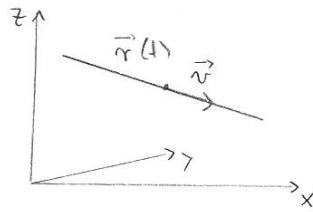
Für die Bahn eines Körpers gilt: $\vec{v} = \text{const}$ (gleichförmige Bewegung)

wenn keine Kräfte auf ihn wirken

Achtung: dies impliziert die Wahl eines geeigneten Bezugssystems, so dass

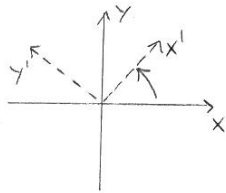
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{v}$$



\rightarrow sog. Inertialsysteme : def. als Bezugssysteme, in denen ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, sich gleichförmig bewegt.

Gegenbeispiel:



ein rotierendes Bezugssystem ist kein Inertialsystem

2. Axiom (Lex secunda, Bewegungsgesetz)

beschreibt die Änderung der Bewegung aufgrund der Einwirkung von Kräften

Def.: Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$ m : träge Masse

das 2. Axiom lautet: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ \vec{F} : Gesamtkraft, die auf das Teilchen einwirkt

für $m = \text{const.}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m \vec{a}$ (*)

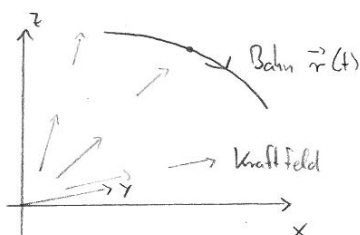
Kraft = Masse \cdot Beschleunigung

speziell für $\vec{F} = 0$:

$(m \neq 0) \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, $\vec{v} = \text{const.}$ d.h. das 1. Axiom ist als Spezialfall im 2. Axiom enthalten

die Gl. (*) entspricht die Bewegungsgleichung für die Bahn eines Körpers im

Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

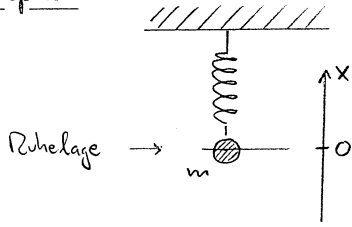


$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Differentialgleichung 2. Ordnung für $\vec{r}(t)$

→ die Bahn $\vec{r}(t)$ ist vollständig determiniert durch die Anfangswerte $\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$

Beispiel:



Körper (Masse m) an eine Feder

betrachte nur eindimensionale Bewegung

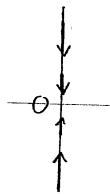
$$\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}(t) = f(x)$$

Hooke'sches Gesetz: $f(x) = -kx$

k : Federkonstante

Kraftfeld:



gilt nur für kleine Auslenkungen

Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$

allgemeine Lösung: $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

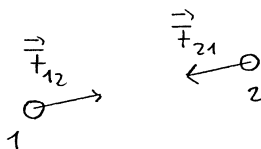
Hinweis: 2. Axiom definiert Kraft und Masse nicht separat

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

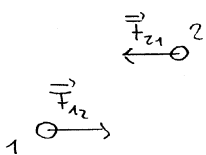
3. Axiom (Lex tertia, Gegenwirkungsprinzip, actio = reactio)

\vec{F}_{ij} : Kraft, die der Körper j auf den Körper i ausübt

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}} \quad (*)$$



aber:



erfüllt (*) erzeugt jedoch Drehmoment

\Rightarrow Zusatz zum 3. Axiom:

Kräfte zwischen zwei Massenpunkten wirken stets in Richtung der Verbindungslinie, d.h.

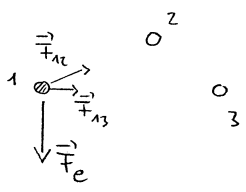
$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

betrachte System aus zwei Körpern, es wirken nur die internen Kräfte \vec{F}_{12} und \vec{F}_{21}

$$\begin{aligned} \rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}}_1(t) & \stackrel{2.A.}{=} \vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2(t) & \stackrel{2.A.}{=} \vec{F}_{21}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \stackrel{3.A.}{=} -\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1(t) = -\frac{m_2}{m_1} \ddot{\vec{r}}_2(t)$ d.h.: Verhältnis der Beschleunigungen = (-1) · Verhältnis der trägen Massen

Zusatz: Superpositionsprinzip



Kräfte addieren sich wie Vektoren

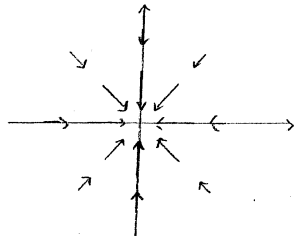
z.B.: $\vec{F}_i = \vec{F}_e + \sum_j \vec{F}_{ij}$

Kräfte:

Körper befindet sich in einem Kraftfeld

a) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$

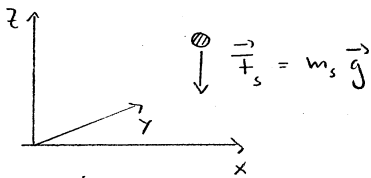
z.B.:



b) geschwindigkeitsabhängige Kräfte

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

1. Gewichtskraft / Schwerkraft



bei dieser Wahl des KS:

m_s = schwere Masse

Kraftfeld = Schwerefeld der Erde

~ const. nahe der Erdoberfläche & kleine $\Delta x, \Delta y$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

Erdbeschleunigung

Bewegungsgleichung: $\vec{F}_s = m_t \vec{a}$

$m_s \vec{g} = m_t \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ und $a = -\frac{m_s}{m_t} g$

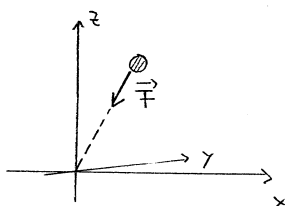
es gilt: - Beschleunigung für alle Körper im Schwerfeld gleich

$$\Rightarrow m_s = \text{const.} \cdot m_t \quad ; \quad \text{setze const.} = 1$$

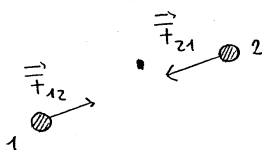
- Einsteins Äquivalenzprinzip:

m_s und m_t prinzipiell gleichwertig \rightarrow Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie

2. Zentralkräfte



oder



$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

in beiden Fällen: $f > 0$ abstoßende Kraft

$f < 0$ anziehende Kraft

Beispiele: - Gravitationskraft: $f(r) = -G m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{schwere Massen!}}$$

- Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen q_1, q_2 :

$$f(r) = q_1 q_2 \frac{1}{r^2} \quad (\text{Gauss'sche Einheiten})$$

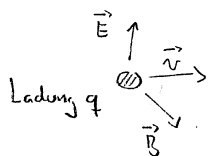
- Hooke'sches Gesetz:

$$f(r) = -k(r - r_0)$$



jetzt: geschwindigkeitsabhängige Kräfte

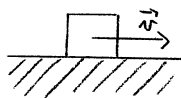
3. Lorentz-Kraft



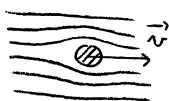
$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

\vec{E} : elektrisches Feld

\vec{B} : magnetisches Feld

4. Reibungskräfte

trockene Reibung



fluide Reibung

$$\vec{F}_{\text{Stokes}} = -\gamma \vec{v}$$

Galilei - Invarianz

gesucht: allgemeine Transformation $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$, so dass IS' ebenfalls ein Inertialsystem ist

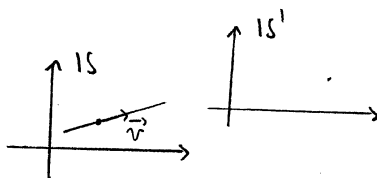
\downarrow \downarrow
 Koordinaten in IS in IS'

zu zeigen: aus $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t$: gleichförmige Bewegung in IS

folgt $\vec{r}'(t') = \vec{r}'(0) + \vec{v}'t'$: ——— " ——— in IS'

(i) räumliche und zeitliche Translationen

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0, \quad t' = t + t_0$$



setze für \vec{r} gleichförmige Bewegung in IS ein:

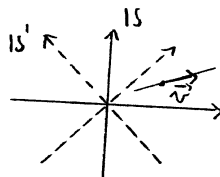
$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}(0) + \vec{v}t + \vec{r}_0 = \vec{r}(0) + \vec{r}_0 + \vec{v}(t' - t_0) = \\ &= \underbrace{\vec{r}(0) + \vec{r}_0 - \vec{v}t_0}_{= \vec{r}'(0)} + \vec{v}t' \quad \rightarrow \quad \vec{v}' = \vec{v} \end{aligned}$$

d.h. IS' ebenfalls ein Inertialsystem

(ii) räumliche Drehungen

$$\vec{r}' = \hat{D} \vec{r}$$

\hat{D} : Drehmatrix



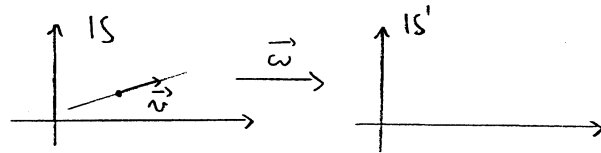
es gilt $\hat{D} \hat{D}^+ = \mathbb{1}$ (siehe Skript MM, Kap. II.2)

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \hat{D} (\vec{r}(0) + \vec{v}t) = \underbrace{\hat{D} \vec{r}(0)}_{= \vec{r}'(0)} + \underbrace{\hat{D} \vec{v}}_{= \vec{v}'} t \quad \rightarrow \quad \text{gedrehter Geschwindigkeitsvektor} \\ &= \vec{r}'(0) + \vec{v}'t' \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$t' = t$$

(iii) (spezielle) Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{\omega} t \\ t' &= t \end{aligned}$$



S' bewegt sich relativ zu S mit Konst. Geschw. $\vec{\omega}$

$$\vec{r}' = \vec{r}(0) + \vec{v} t - \vec{\omega} t = \underbrace{\vec{r}(0)}_{= \vec{r}'(0)} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{\omega})}_{= \vec{v}'} t = t'$$

aus (i), (ii) und (iii) folgt schließlich: die allgemeinste Transformation, die ein S in S' überführt

$$\hat{G}: (\vec{r}, t) \longrightarrow (\vec{r}', t') = (\hat{O} \vec{r} + \vec{r}_0 - \vec{\omega} t, t + t_0)$$

die \hat{G} bilden zusammen die Galilei-Gruppe

$$\hat{G} = \hat{G}[\hat{O}, \vec{r}_0, \vec{\omega}, t_0] \text{ festgelegt durch: } \hat{O} \rightarrow 3 \text{ Parameter (Winkel)}$$

$$\vec{r}_0 \rightarrow 3 \text{ -- " --}$$

$$\vec{\omega} \rightarrow 3 \text{ -- " --}$$

$$t_0 \rightarrow 1 \text{ -- " --}$$

zusammen: 10 reelle Parameter

Galilei'sches Relativitätsprinzip

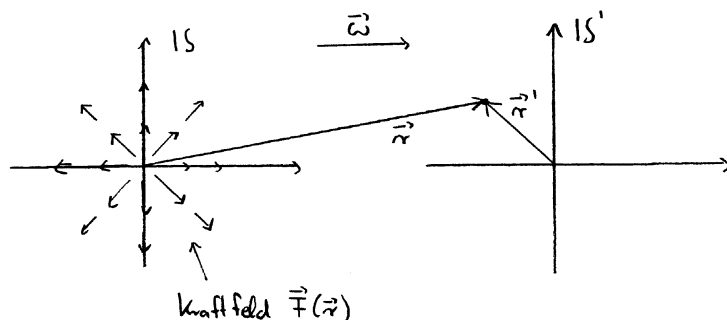
Die Newton'schen Gesetze sind unter Galilei-Transformationen invariant

1. Axiom: ok, siehe (i) - (iii) oben

2. Axiom: was bedeutet "invariant"? \rightarrow das physikalische Gesetz hat in S und S' dieselbe Form

$$\text{also: } m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}, t) \text{ in S } \rightarrow m \frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}'(t') = \vec{F}'(\vec{r}', t') \text{ in S'}$$

Beweis für: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\omega} t$
 $t' = t$



für das Kraftfeld in S' gilt:

$$\vec{F}'(\vec{r}', t') = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad \text{und damit:} \quad \vec{F}'(\vec{r}', t') = \vec{F}(\vec{r}' + \vec{\omega}t', t')$$

für die Newton'sche Bewegungsgleichung folgt damit:

$$\text{in } S' \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}'(t) + \vec{\omega}t) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'(t) \stackrel{t'=t}{=} m \frac{d^2}{dt'^2} \vec{r}'(t') \\ \parallel \\ \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}'(\vec{r}', t') \end{array} \right\} \text{ in } S' \quad \text{ok.}$$

A.2 Erhaltungssätze

eine physikalische Größe A ist eine Erhaltungsgröße, wenn $A(t) = \text{const}$, d.h. $\frac{dA}{dt} = 0$

a) Impulserhaltung

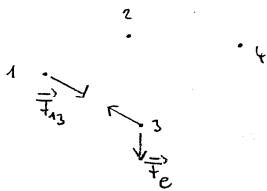
- für ein einzelnes Teilchen: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (2. Axiom)

Impuls ist erhalten, falls $\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ (1. Axiom)

- für ein System aus N Teilchen

an den Orten $\vec{r}_i(t)$, $i=1, \dots, N$

mit den Massen m_i



es wirken: innere Kräfte \vec{F}_{ij}

äußere Kräfte \vec{F}_e

\Rightarrow Bewegungsgleichung für Teilchen i :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad \text{mit der Gesamtkraft} \quad \vec{F}_i = \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$$

Def.: Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ mit der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$

Schwerpunktimpuls: $\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{Gesamtimpuls}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}}_{=0 \text{ (siehe Übungen)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i)}$$

d.h. Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt
(Masse M , Ort \vec{r}) unter dem Einfluss der Kraft

$$\vec{F}_{e, \text{ges}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_e(\vec{r}_i) \quad \left(\text{i.A.} \neq N \vec{F}_e(\vec{r}) \right)$$

für $\vec{F}_e = 0$ folgt damit:

↳ Schwerpunktsatz

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = 0 \quad \text{d.h. der Gesamtimpuls ist eine Erhaltungsgröße}$$

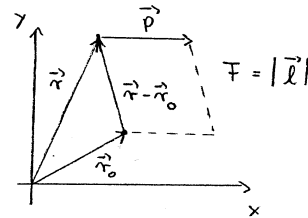
und für den Schwerpunkt: $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}}{M} t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) - \frac{\vec{p}}{M} t \quad \text{ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße}$$

b₃ Drehimpulserhaltung

Def.: Drehimpuls relativ zum Bezugspunkt \vec{r}_0 .

$$\boxed{\vec{l} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}}$$



$|\vec{l}|$ = Flächeninhalt des Parallelogramms

hier: $\vec{l}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{p}(t)$

$$\rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{p}(t)}_{= m \dot{\vec{r}}(t)} + \underbrace{(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{p}}(t)}_{= \vec{F}} = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{F} =: \vec{m}$$

$= 0$

Def.: das von der Kraft \vec{F} ausgeübte Drehmoment

$$\boxed{\vec{m} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{m}}$$

→ der Drehimpuls ist erhalten für $\vec{m} = 0$. $\vec{F} = 0$ oder

. $\vec{F} \parallel (\vec{r} - \vec{r}_0) \rightarrow$ Zentralkraft

jetzt für ein System aus N Teilchen

$$\text{Gesamtdrehimpuls: } \boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{p}_i}$$

→ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \dots$ auch hier: Aufteilung nach inneren und äußeren Kräften:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{i=1}^N ((\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_e(\vec{r}_i)) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N ((\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij})}_{= 0 \text{ (siehe \u00dcbungen)}}$$

Def.: \u00e4u\u00dferes Drehmoment

$$\vec{m}_{i,e} = (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_{i,e} =: \vec{M}_e}$$

Drehimpulserhaltungssatz: f\u00fcr $\vec{M}_e = 0$ ist \vec{L} eine Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe

C, Energieerhaltung

Ausgangspunkt: $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \right] = \frac{d}{dt} T(t)$$

Def.: Kinetische Energie

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2}$$

es gilt also $\frac{d}{dt} T(t) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t) \quad \Big| \int_{t_a}^{t_b} dt$

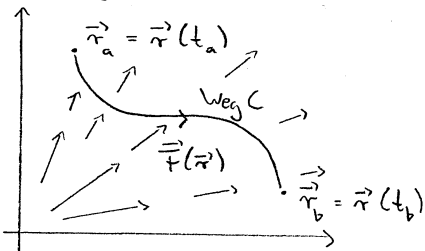
$$\underbrace{\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} T(t)}_{= T(t_b) - T(t_a) = \Delta T} = \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \Delta A : \text{ die von der Kraft } \vec{F} \text{ entlang der Bahn geleistete Arbeit}$$

$$= T(t_b) - T(t_a) = \Delta T$$

\u2192 allgemeinste Form des Energiesatzes f\u00fcr ein Teilchen

$$\boxed{\Delta T = \Delta A}$$

zur Erinnerung: Linienintegrale (Math. Methoden, Kap. VI.4)



$$\int_{\vec{r}_{a,C}}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \Delta A$$

wann ist ΔA unabh\u00e4ngig vom Verlauf des Wegs? falls

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0}$$

ein solches Kraftfeld hei\u00dft "konservativ"

in diesem Fall existiert zu $\vec{F}(\vec{r})$ ein skalares Potential $V(\vec{r})$

mit $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})}$

$$\Rightarrow \Delta A = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (\vec{\nabla} V(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = - \underbrace{(V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a))}_{\Delta T} \stackrel{!}{=} \Delta T$$

$$= V(\vec{r}(t_a)) - V(\vec{r}(t_b)) = T(t_b) - T(t_a)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}(t_a)) + T(t_a) = V(\vec{r}(t_b)) + T(t_b) \quad \text{d.h.} \quad \boxed{T + V = E = \text{const.}}$$

Energieerhaltungssatz

T: kinetische Energie

V: potentielle -"

E ist Erhaltungsgröße, falls \vec{F} konservativ

E: Gesamtenergie

→ für ein System aus N Teilchen mit $\vec{F}_i = \vec{F}_e(\vec{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$

gesamte potentielle Energie:

$$\boxed{V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i,j (i < j)} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + V_e(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)} \rightarrow \vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

↳ jedes Teilchenpaar wird nur einmal gezählt

der externe Anteil:

$$V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{j=1}^N V_{ej}(\vec{r}_j)$$

z.B.: Gravitationspotential $V_{ej}(\vec{r}_j) = -G m_j M \frac{1}{r_j}$

$$\rightarrow \vec{F}_{ei}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla}_i V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_i V_{ei}(\vec{r}_i) \quad \vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_i \\ \partial/\partial y_i \\ \partial/\partial z_i \end{pmatrix} \quad \text{Gradient bzgl. } \vec{r}_i$$

der interne Anteil:

V_{ij} hängt nur vom Betrag des Abstands ab, d.h.

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \Phi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \Rightarrow \vec{F}_{ij} \text{ Zentralkraft, denn:}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \dots$$

$$\text{NZ: } \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_1} = \Phi'_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right)^{1/2}$$

$$= a(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \frac{x_1 - x_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\dots = \underbrace{-\phi'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}_{= f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{ok.}$$

gesamte kinetische Energie :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2$$

Gesamtenergie :

$$E = T + V$$

Behauptung : E ist eine Erhaltungsgröße

$$\rightarrow \text{zu zeigen ist } \frac{dE}{dt} = 0, \text{ also } \frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i^2) \\ &= 2 \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \quad \leftarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \frac{d}{dt} V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\text{es gilt : } \frac{d}{dt} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \text{und damit : } \frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_j \\ \frac{d}{dt} V_e(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i V_e \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned}$$

verwende $-\vec{\nabla} V = \vec{F} \rightarrow$ vollständige Beweis siehe Übungen

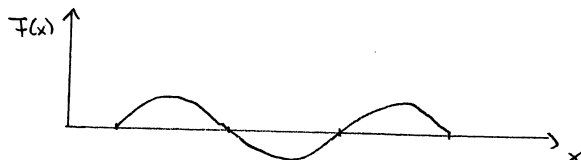
A.3 Bewegung in einer Dimension

Newton'sche Bewegungsgleichung $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$

$$\text{setze } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \\ F_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow $m \ddot{x} = F(x)$ beschreibt die Bewegung im eindimensionalen Kraftfeld $F(x)$

z.B.:



Arbeit entlang des Wegs C von $\vec{r}_a = (x_a, 0, 0)$ nach $\vec{r}_b = (x_b, 0, 0)$:

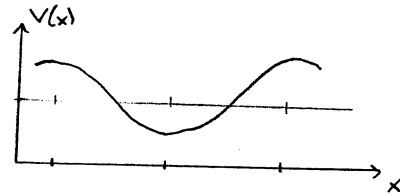
$$\Delta A = \int_{\vec{r}_a, C}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx = [-V(x)]_{x_a}^{x_b} = V(x_a) - V(x_b)$$

↳ unabhängig vom Weg \sim nur ein Weg in $d=1$

Gesamtenergie: $E = T + V$

Kin. Energie: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

pot. Energie
z.B.



$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)}$$

E ist Erhaltungsgröße, d.h. durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 + V(x(0)) = \text{const.} \quad \hookrightarrow x(0), \dot{x}(0)$$

damit reduziert sich $m\ddot{x} = F(x)$ auf eine Dgl. 1. Ordnung:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} (E - V(x)) \quad \boxed{\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} \quad (*)$$

+ : $\dot{x} > 0 \rightarrow$ nach rechts
- : $\dot{x} < 0 \leftarrow$ nach links

Lösung der Dgl. (*) durch Separation der Variablen

\rightarrow siehe Vorl. MM, Kap. IV.3.1

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a(x)} dx = dt \quad (x \text{ und } t \text{ sind separiert})$$

$$\text{Integration ergibt: } \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a(x)} dx = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 \quad \text{mit } \begin{matrix} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \end{matrix}$$

daraus folgt die implizite Lösung der Dgl. (*):

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} dx = t_2 - t_1} \quad (\text{für } +\text{-Vorzeichen})$$

sei $g(x)$ Stammfunktion zu $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $g(x_1) = g(x(0)) = g_0$, $x_2 \rightarrow x$

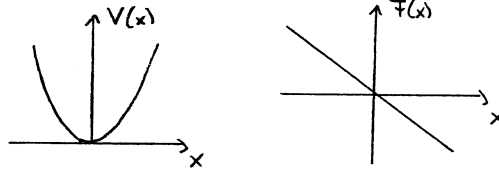
$$\Rightarrow \boxed{g(x(t)) = t + g_0}$$

↳ Auflösung nach $x(t)$ ergibt Lösung der Dgl. (*)

Beispiel:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow F(x) = -kx$$

also $m\ddot{x} = -kx$ (siehe a4)



$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}kx^2)}} dx = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} dx = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x\right) \right]_{x_1}^{x_2} \stackrel{!}{=} t$$

setze: $x_1 = 0, x_2 \rightarrow x$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

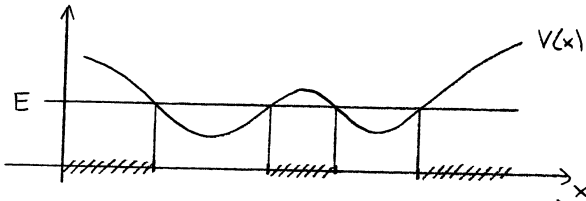
Vorfaktor: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 + \underbrace{V(x(0))}_{=0} = \frac{1}{2} m \left[\sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{\frac{k}{m}} \right]^2 = E$ ok

Bewegungstypen

Ausgangspunkt: Energiesatz $E = T + V \rightarrow$ es gilt $T \geq 0$

$$\Rightarrow E - V \geq 0 \rightarrow E \geq V(x)$$

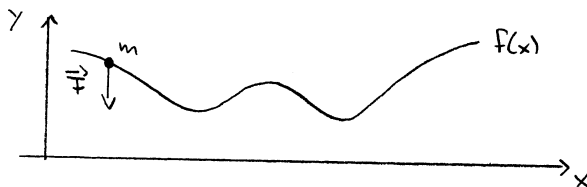
d.h.: die Bewegung des Körpers ist eingeschränkt auf x -Werte mit $E \geq V(x)$



///////

↳ (klassisch) verbotene Bereiche

Einschub: zweidimensionale Bewegung entlang einer vorgegebenen Bahn im Schwerfeld



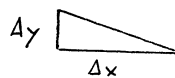
→ die Bewegung in der x - y -Ebene erfüllt die "Zwangsbedingung"

$$y = f(x)$$

Potential: $V(x,y) = mgy \rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$

↳ entlang der Bahn gilt $V = mg f(x) \hat{=} \text{dem } V(x) \text{ da eindimensionale Bewegung}$

Kin. Energie: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + f'(x)^2)$



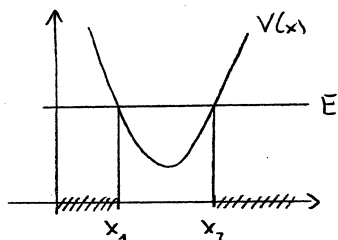
$$\Delta y = f'(x) \Delta x$$

$$\dot{y} = f'(x) \dot{x}$$

→ ähnliches Problem wie eindimensionale Bewegung im Potential $V(x)$

aber: andere Lösung für die Bahn $x(t)$ wg Zusatzterm $f'(x)^2$

a) gebundene Bewegung

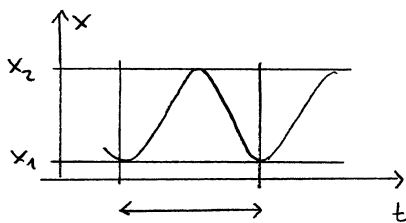


$E > V(x)$ für $x_1 < x < x_2$
 $E = V(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_2$
 → Teilchen ist im Intervall $[x_1, x_2]$ eingesperrt

für $x = x_{1/2}$ gilt: $T = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$

↳ Umkehrpunkte

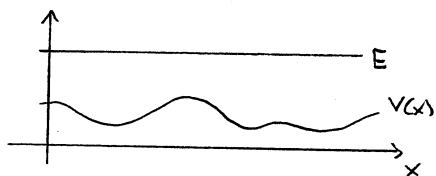
⇒ periodische Bewegung



Schwingungsperiode: T

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} dx$$

b) ungebundene Bewegung



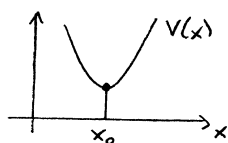
$E > V(x) \forall x$
 Teilchen bewegt sich mit variabler Geschwindigkeit nach rechts oder links (je nach Anfangsbed.)

c) Ruhelagen

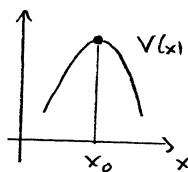
Punkt x_0 mit $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$

falls $x(t=0) = x_0 \rightarrow \ddot{x}(t=0) = \frac{1}{m} F(x_0) = 0$
 $\dot{x}(t=0) = 0$ } Teilchen ruht bei $x = x_0$

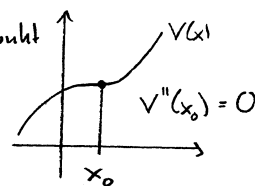
i, Minimum



ii, Maximum



iii, Sattelpunkt



im folgenden: Untersuchung der Bewegung in der Nähe dieser Ruhelagen

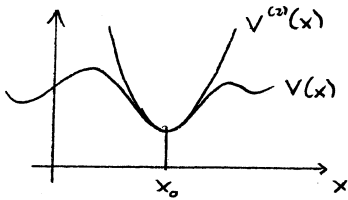
i, Minimum: $V'(x_0) = 0, V''(x_0) > 0$

Taylor-Entwicklung von $V(x)$ um x_0 bis 2. Ordnung

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{(x-x_0)V'(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 V''(x_0) + \dots$$

wird vernachlässigt

$$= V^{(2)}(x) \rightarrow \text{eindimensionale harmonische Oszillator}$$



→ Potential wird in der Nähe von x_0 durch eine Parabel angenähert: „harmonische Näherung“

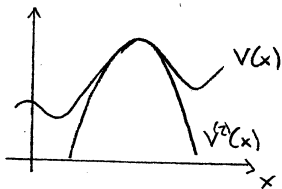
Kraft: $F(x) = -V'(x) \approx -\underbrace{(x-x_0)}_{\downarrow} V''(x_0) \rightarrow$ linear in der Auslenkung $\}$

$\hat{=}$ Hooke'schem Gesetz mit Federkonstante $k = V''(x_0) > 0$

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -k(x-x_0) \rightarrow m\ddot{j} = -k j$
 $\hookrightarrow \ddot{j} = -\tilde{\omega}^2 j$

Kraft wirkt der Auslenkung entgegen \Rightarrow Ruhelage ist stabil

ii, Maximum: $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) < 0$



analog, aber: $m\ddot{j} = \tilde{k} j$ mit $\tilde{k} = -V''(x_0) > 0$

\Rightarrow allgemeine Lösung $j(t) = a e^{\tilde{\omega} t} + b e^{-\tilde{\omega} t}$, $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}}$

Falls $a \neq 0$ (bestimmt durch die Anfangsbedingungen)

$|j(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ d.h.: - Ruhelage ist instabil

= Teilchen verlässt auf jeden Fall den Gültigkeitsbereich der Näherung

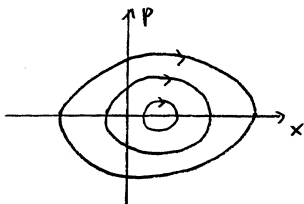
Phasenraumdarstellung

(ein Teilchen, eindimensionale Bewegung)

die Newton'sche Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = F(x) \rightarrow$ Dgl. 2. Ordnung

lässt sich schreiben als: $\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p \\ F(x) \end{pmatrix}}$ \rightarrow zwei gekoppelte Dgl. 1. Ordnung

$\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \rightarrow$ Darstellung der Bewegung des Teilchens in der zweidimensionalen (x, p) -Ebene: Phasenraum



Achtung: Dimension des Phasenraums =

$$\begin{array}{c} 2 \cdot d \cdot N \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \nwarrow \\ x, p \quad \text{räumliche Dimension} \quad \text{Zahl der Teilchen} \end{array}$$

Def.: Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = T + V$$

Für ein Teilchen in $d=1$: $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

Energiesatz: $T + V = E = H(x, p)$
 $\hookrightarrow = \text{const}$

\Rightarrow die Bahnen im Phasenraum sind Höhenlinien der Hamilton-Funktion

Phasenraumportrait: Gesamtheit aller möglichen Bahnen im Phasenraum

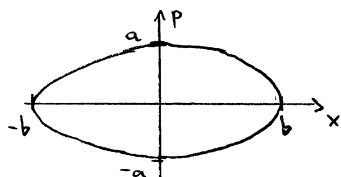
Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \quad k > 0$$

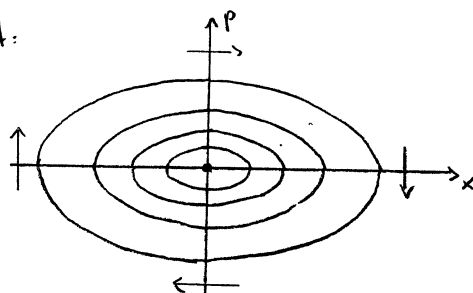
$$\rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \quad : \text{ Ellipsengleichung}$$

mit $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{\frac{2E}{k}}$



Phasenraumportrait:

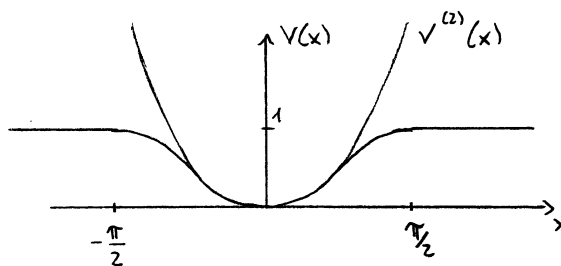


Vorteile dieser Darstellung

- durch jeden Phasenraumpunkt läuft nur eine mögliche Bahn
 \rightarrow Phasenraumbahnen können sich nicht kreuzen
denn: Bahn des Massenpunkts ist vollständig determiniert durch $x(t=0), p(t=0)$
- übersichtliche Darstellung der Bewegung
 \hookrightarrow nur für $d=1, N=1$
- jeder Punkt im Phasenraum = ein Zustand des Systems
 \Rightarrow Abzählen von Zuständen:
 - statistische Physik
 - Quantenmechanik

das nächste Beispiel:

$$V(x) = \begin{cases} \sin^2 x & : |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & : |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

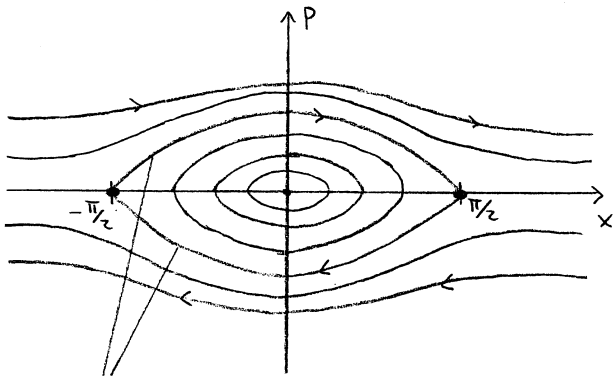


Taylor-Entwicklung um Ruhelage ($x_0=0$): $V_2(x) = x^2$

⇒ für kleine Energien: Phasenraumbahnen wie für harm. Oszillator

aber: Übergang von gebundener zu ungebundener Bewegung bei $E=1$

Phasenraumportrait:



→ $(x, p) = (0, 0)$: Ruhelage
„elliptische Fixpunkt“

→ $(x, p) = (\pm \frac{\pi}{2}, 0)$: „hyperbolische Fixpunkt“
↓ Endpunkte der Phasenraumbahnen für $E=1$

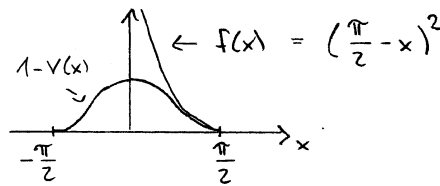
→ Separatrix ($E=1$): trennt die Bereiche gebundener und ungebundener Bewegung

die Schwingungsperiode τ divergiert für $E \rightarrow 1$!

dem: $\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} dx$

$$= \sqrt{2m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-V(x)}} dx$$

$x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}, E=1$



es gilt: $1 - V(x) \leq f(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-V(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

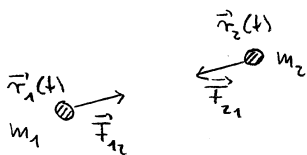
damit folgt: $\tau > \sqrt{2m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\pi/2 - x} dx$$

Subst. $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{y} dy = [\ln y]_0^{\pi} = \infty \quad \checkmark$$

1.4 Zweikörperproblem mit Zentralkraft



Wechselwirkung der beiden Körper über Zentralpotential

$$V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad V_e = 0$$

Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Strategie: Reduktion der Bewegungsgleichungen (6 gekoppelte Dgl. 2. Ordnung)
auf ein eindimensionales Problem \rightarrow eine Dgl.
 \rightarrow verwende Erhaltungssätze aus Kap. A.2

a, Impulserhaltung

$\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{0}$: der Gesamtimpuls ist eine Erhaltungsgröße
 \rightarrow gleichförmige Bewegung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}(t)$

\Rightarrow verwende Schwerpunkts- und Relativkoordinate zur Beschreibung des Systems

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \rightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ & & & & \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= -\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= +\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{V'(r)}{r} \vec{r} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{\mu} \ddot{\vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{V'(r)}{r} \vec{r}} \quad (*)$$

Def.: reduzierte Masse

$$\boxed{\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

das bedeutet:

- Bewegung von \vec{R} und \vec{r} kann separat betrachtet werden

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}}{M} t$$

$\rightarrow \vec{r}(t) \hat{=}$ Bewegung eines einzelnen Teilchens gemäß Dgl. (*)

\hookrightarrow Masse μ , Zentralpotential $V(r)$

- aus $\vec{R}(t)$ und $\vec{r}(t)$ folgen schließlich $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$

b, Drehimpulserhaltung

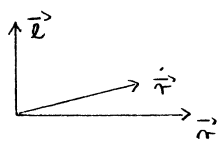
Für den Gesamt Drehimpuls gilt: $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ (siehe Übungen)

\rightarrow Drehimpuls der Relativbewegung: $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, da $\ddot{\vec{r}} \propto \vec{r}$ (Zentralkraft) \vec{L} ist Erhaltungsgröße

\hookrightarrow Richtung und Betrag

daraus folgt:

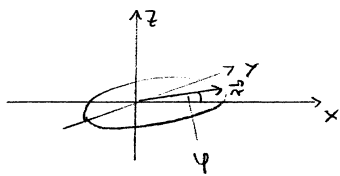


Bewegung verläuft in einer Ebene \perp zu \vec{L}

geeignete Wahl des Koordinatensystems: $\vec{L} = L \vec{e}_z$

\rightarrow Beschreibung der Bewegung durch ebene Polarkoordinaten (r, φ) in der (x, y) -Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Einheitsvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$$\text{es gilt: } \dot{\vec{r}} = \dot{e}_r r + r \dot{e}_\varphi \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{damit folgt für den Drehimpuls: } \vec{l} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \underbrace{\mu r^2 \dot{\varphi}}_{=l} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = l \vec{e}_z \end{aligned}$$

\Rightarrow Azimutalgleichung

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}$$

verknüpft die beiden zeitabhängigen Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$!

C, Energieerhaltung

$$\text{Gesamtenergie: } E_g = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}_{\downarrow} + \underbrace{V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}_{=V(r)}$$

$$\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2 \text{ einsetzen} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$$

Schwerpunktsenergie, ist erhalten wg. $\dot{\vec{R}} = 0$

$$E_g \text{ ist erhalten} \Rightarrow \text{Energie der Relativbewegung } E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

ist ebenfalls erhalten $= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$

$$\text{Einsetzen von } \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} :$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + V(r)}_{=U(r)} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$$

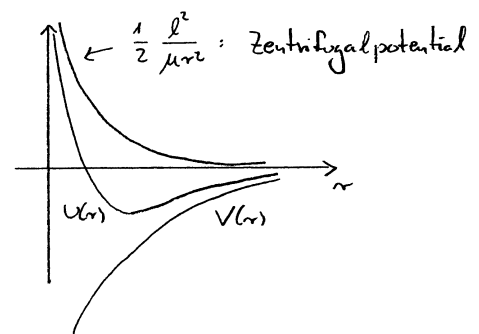
$= U(r)$: effektives Potential

das bedeutet: die Radialkoordinate r vollführt eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(r)$

$$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}$$

- weiter wie in Kap. A3:
- Separation der Variablen
 - Integration
 - Auflösen nach $r(t)$

$$\text{mit } \varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{1}{r(t')^2} dt' \quad \rightarrow \text{vollständige Lösung des allgemeinen Zweikörperproblems}$$



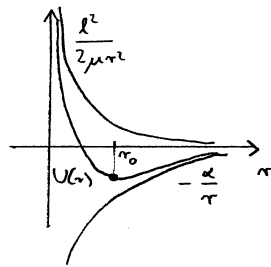
das Keple-Problem

→ Zwei-Körper-Problem mit Gravitationswechselwirkung: $V(r) = -Gm_1m_2 \frac{1}{r} = -\frac{\alpha}{r}$

für das effektive Potential folgt damit: $U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$
 (im folgenden: $l \neq 0$)

$r \rightarrow 0 : U(r) \rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} \rightarrow \infty$

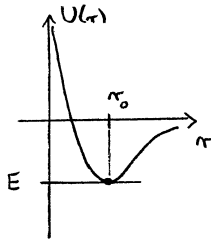
$r \rightarrow \infty : U(r) \rightarrow -\frac{\alpha}{r} \rightarrow 0$



Potentialminimum bei
 $r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$
 $U(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{\mu\alpha^2}{l^2}$

Bewegungstypen (Diskussion wie in Kap. A.3)

→ Ruhelage

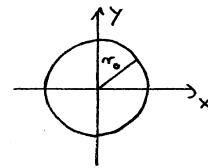


$E = U(r_0) \rightarrow r = r_0 \quad \frac{dr}{dt} = 0$

stabile Ruhelage der Radialbewegung.

→ $\dot{\psi}(t) = \frac{l}{\mu r_0^2} = \omega = \text{const} \Rightarrow \psi(t) = \omega t + \psi_0$

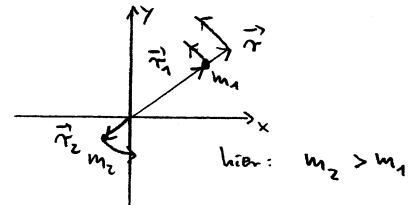
d.h.: Relativkoordinate vollführt Kreisbewegung



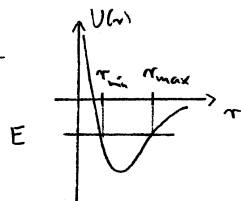
$\vec{r}(t) = r_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \psi_0) \\ \sin(\omega t + \psi_0) \end{pmatrix}$

⇒ Bewegung in Teilchenkoordinaten \vec{r}_1, \vec{r}_2

setze $\vec{R} = 0$: $\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ebenfalls} \\ \text{Kreisbewegung} \end{array}$

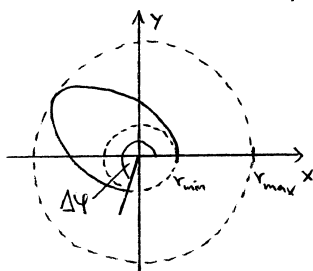


→ gebundene Bewegung



$U(r_0) < E < 0$

⇒ Oszillation zwischen den Umkehrpunkten r_{\min} und r_{\max}



$\Delta\psi$: Winkelverdrängung nach einer Periode der Oszillation

es gilt: $\dot{\psi}(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}$

⇒ $\frac{\Delta\psi}{2} = \int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \frac{l}{\mu r(t')^2} dt' = \dots$

Substitution $t' \rightarrow r$, $\frac{dr}{dt'} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))}$, $\int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \rightarrow \int_{r_{\min}}^{r_{\max}}$

$$\dots = \frac{l}{\mu} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr = \frac{l}{\mu} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U(r))}} dr$$

Bedingung für geschlossene Bahnen:

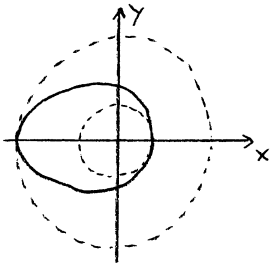
$$q \Delta\psi = 2\pi p$$

mit $q, p \in \mathbb{N}$

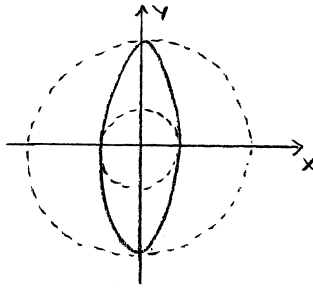
q : Zahl der Oszillationen $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$
 p : Zahl der Umläufe

$$\hookrightarrow \Delta\psi = 2\pi \frac{p}{q} \quad \text{mit } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

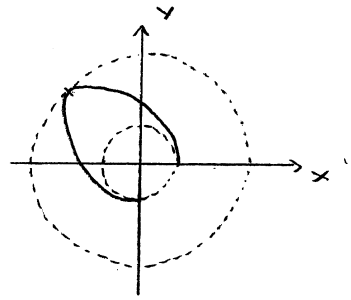
Beispiele:



$$\Delta\psi = 2\pi \rightarrow q=1, p=1$$

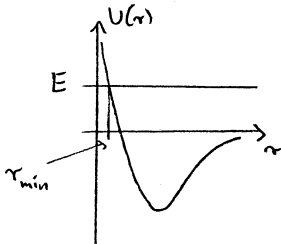


$$\Delta\psi = \pi \rightarrow q=2, p=1$$



$$\Delta\psi = \frac{3}{2}\pi \rightarrow q=4, p=3$$

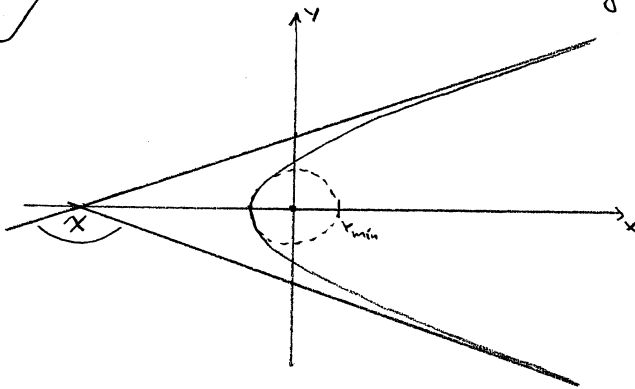
ungebundene Bewegung



$E > 0$: Reflexion an einem Umkehrpunkt r_{\min}

für große Abstände: $V(r) \rightarrow 0$

\Rightarrow geradlinige Bewegung

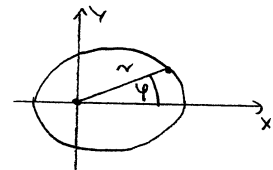


χ : Streuwinkel

Berechnung der Bahnkurven

hier: nicht die vollen Lösungen $r(t)$ und $\psi(t)$

stattdessen: Berechnung der Form der Bahn $r(\psi)$



$$\text{es gilt: } \underbrace{\frac{d}{dt} r(\psi)}_{= \dot{r}} = \frac{dr}{d\psi} \dot{\psi} = \underbrace{\frac{dr}{d\psi} \frac{l}{\mu r^2}}_{\text{Einsetzen in } E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)}$$

Einsetzen in $E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$

$$\Rightarrow E = \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

diese Ausdruck lässt sich vereinfachen durch Verwendung des inversen Radius

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{l^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u} \quad (*) \quad \text{inhomogene, nicht-lineare Dgl. 2. Ordnung für } u(\varphi)$$

bilde $\frac{d}{d\varphi}$ von Gl. (*)

$$0 = \frac{l^2}{2\mu} \left[2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{du}{d\varphi} \quad \left| \cdot \frac{1}{\frac{du}{d\varphi}} \right.$$

$$0 = \frac{l^2}{\mu} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) - \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha\mu}{l^2}} \quad \text{inhomogene, lineare Dgl. 2. Ordnung für } u(\varphi)$$

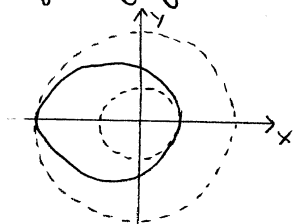
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung: $u_0(\varphi) = a \sin \varphi + b \cos \varphi$

spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: $u_s = \frac{\alpha\mu}{l^2} (= \text{const})$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: } \boxed{u(\varphi) = \frac{\alpha\mu}{l^2} + a \sin \varphi + b \cos \varphi}$$

jetzt: geschickte Wahl der Anfangsbedingungen

$$\rightarrow r(\varphi=0) = r_{\min}$$



$\Rightarrow u(\varphi=0)$ maximal, also

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} \leq 0$$

$$\Rightarrow a = 0, b \geq 0 \quad \text{und damit} \quad u(\varphi) = \frac{1}{k} + b \cos \varphi \quad \text{mit} \quad k = \frac{l^2}{\alpha\mu}$$

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{k} \left(1 + \underbrace{bk}_{=\varepsilon} \cos \varphi \right)$$

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (*)$$

Gl. (*) bestimmt die geometrische Form der Bahn der Relativkoordinate des Zweikörperproblems

ε : „numerische Exzentrizität“

$\varepsilon = 0$: Kreis

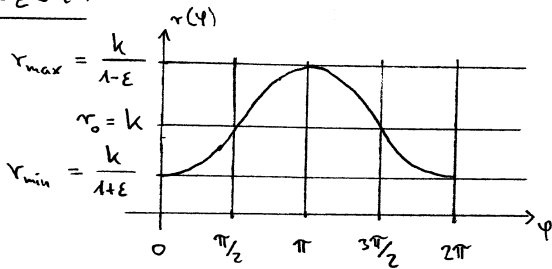
$0 < \varepsilon < 1$: Ellipse

$\varepsilon = 1$: Parabel

$\varepsilon > 1$: Hyperbel

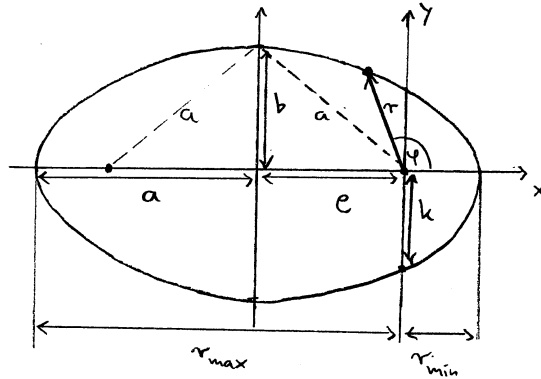
$\underline{\varepsilon = 0}$: $r(\varphi) = k = \frac{l^2}{\alpha \mu} = \text{const.}$
 $= r_0$: Ruhelage der Radialbewegung

$0 < \varepsilon < 1$:



→ gebundene Bewegung zwischen r_{\min} und r_{\max}
 → Winkelverschiebung $\Delta\varphi = 2\pi$

→ Ellipse mit einem Brennpunkt bei $(x,y) = (0,0)$



Bestimmung der Ellipsenparameter:

$r_{\min} + r_{\max} = 2a$

⇒ $a = \frac{k}{1-\varepsilon^2}$ große Halbachse

$e = a - r_{\min} = \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min})$

$e = \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon^2}$ lineare Exzentrizität, Brennweite

es gilt : $e = \varepsilon a$

kleine Halbachse (b) folgt aus $b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$

$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

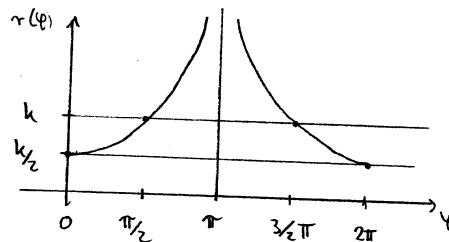
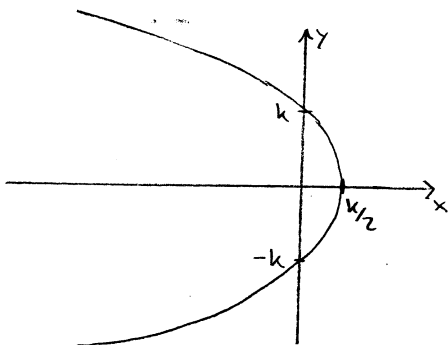
Gl. (*) $\hat{=}$ Ellipsengleichung in Polarkoordinaten

in kartesischen Koordinaten :

$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\underline{\varepsilon = 1}$

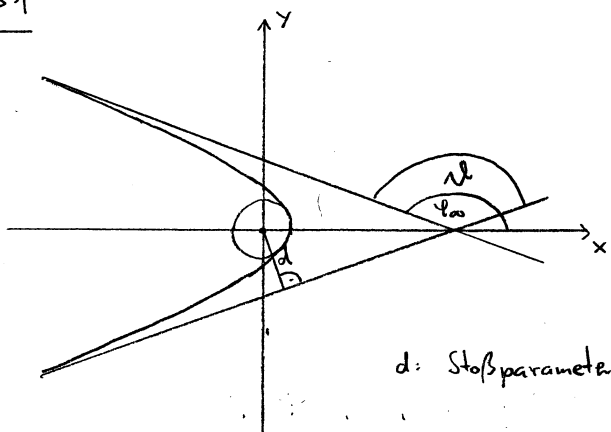
$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \cos\varphi}$



- $r(\varphi)$ divergiert bei $\varphi = \pi$

- Streuwinkel $\chi = \pi$

- Parabel → $x = \frac{k}{2} - \frac{y^2}{2k}$

$\varepsilon > 1$ 

d: Stoßparameter

 $r(\varphi)$ divergiert bei

$$\cos \varphi_{\infty} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$2\varphi_{\infty} - \pi = \nu$$

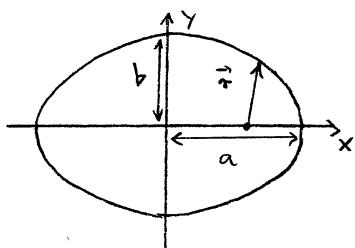
$$\Rightarrow \text{Streuwinkel } \nu = 2\varphi_{\infty} - \pi$$

die Keple'schen Gesetze (1609 - 1618)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Die Verbindungslinie zwischen den Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

folgt direkt aus der Drehimpulserhaltung $\rightarrow \Delta A = \frac{l}{2\mu} \Delta t$ (siehe Übungen)
 $= \text{const.}$

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich, wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.

gesamte Fläche der Ellipse: $A = \pi ab$

$$\text{mit } a = \frac{k}{1-\varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{ka}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{k}{a}} \quad \Rightarrow \quad A = \pi \sqrt{k} a^{3/2}$$

außerdem gilt: $A = \frac{l}{2\mu} T$ ist die vom Vektor \vec{r} in der Umlaufzeit T überstrichene Fläche

$$\text{mit } k = \frac{l^2}{\mu} \text{ folgt damit: } \frac{l}{2\mu} T = \pi \frac{l}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3}$$

$$\text{für zwei Planeten (1,2) folgt also: } \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\mu_1/d_1}{\mu_2/d_2} \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

aus $\mu_i = \frac{m_i M}{(m_i + M)}$ und $\alpha_i = G m_i M$ mit $M = \text{Summenmasse}$

folgt: $\frac{\mu_i}{\alpha_i} = \frac{1}{G} \frac{1}{(m_i + M)} \approx \frac{1}{GM}$ d.h. das 3. Keplersche Gesetz ist näherungsweise erfüllt
 \uparrow
 $m_i \ll M$

Drei und mehr Körper

Zwei Körper - Problem : 6 Dgl. 2. Ordnung \longrightarrow eine Dgl. 1. Ordnung
 \downarrow
 Verwendung aller verfügbaren Erhaltungssätze

Drei Körper - Problem : 9 Dgl. 2. Ordnung
 es stehen jedoch keine weiteren Erhaltungssätze zur Verfügung

\Rightarrow das Problem von $N \geq 3$ gravitativ wechselwirkenden Körpern ist i.A. analytisch nicht lösbar (es gibt lösbare Spezialfälle)

\rightarrow Konsequenzen für - Stabilität / Vorhersagbarkeit der Teilchenbahnen
 \rightarrow chaotische Bewegung

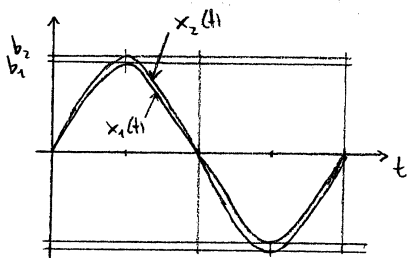
Beispiel: Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen

• betrachte zunächst den harmonischen Oszillator \rightarrow allgemeine Lösung $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

\rightarrow zwei verschiedene Bahnen mit fast identischen Anfangsbedingungen

$$a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 \neq b_2 \quad \text{also} \quad x_1(t) = b_1 \sin \omega t$$

$$x_2(t) = b_2 \sin \omega t$$



$$\rightarrow |x_2(t) - x_1(t)| = |b_2 - b_1| \underbrace{|\sin \omega t|}_{= \omega t \text{ für kleine } t}$$

d.h. $|x_2(t) - x_1(t)|$ wächst linear mit t

• jetzt: chaotische Dynamik

$$\boxed{|x_1(t) - x_2(t)| = e^{\lambda t} |x_1(0) - x_2(0)|}$$

λ : Liapunov - Exponent

für $\lambda > 0$:

- exponentielle Anwachsen von kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen
- d.h. extreme Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen

1.5 Lagrange-Formalismus

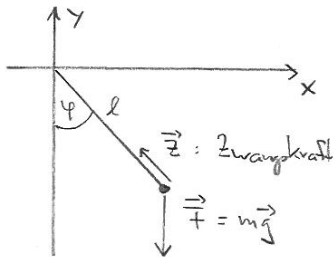
in der Newtonschen Mechanik \rightarrow Bewegungsgleichungen für ein System von N Teilchen:

$$m \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(e)} \quad i=1, \dots, N$$

- \rightarrow Kräfte einsetzen
- \rightarrow gekoppelte Dgl lösen

im Folgenden: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen, die die Bewegung der Teilchen einschränken

Beispiel: das ebene Pendel



Zwangsbedingungen:

$\rightarrow z=0$: Einschränkung der Bewegung auf die x - y -Ebene

$\rightarrow x^2 + y^2 = l^2$: konstante Fadenlänge l

\Rightarrow die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$$

$\rightarrow \vec{F}$ ist gegeben

aber $\rightarrow \vec{Z}$ ist unbekannt, hängt von der Bahn $\vec{r}(t)$ ab, nur die Wirkung auf die Bewegung ist bekannt (die Zwangsbedingung)

Strategie \rightarrow Aufstellen der Lagrangegleichungen

a, verallgemeinerte Koordinaten

allgemein für ein System von N Massenpunkten, Dimension d , R Zwangsbedingungen:

\rightarrow Anzahl der Freiheitsgrade
$$F = dN - R$$

\Rightarrow wähle F geeignete „verallgemeinerte Koordinaten“

q_1, q_2, \dots, q_F

(auch: „generalisierte Koordinaten“)

→ die Koordinaten der Massenpunkte lassen sich schreiben als Funktionen der q_i :

$$X_n(q_1, \dots, q_s), \quad n = 1, \dots, dN$$

wichtig: die Zwangsbedingungen sind für beliebige Werte der q_i erfüllt!

für das ebene Pendel

$$\left. \begin{array}{l} N = 1 \\ d = 3 \\ R = 2 \end{array} \right\} \quad \mathcal{F} = 3 - 2 = 1 \quad \rightarrow \text{wähle als verallgemeinerte Koordinate } q = \varphi$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1(\varphi) = x(\varphi) = l \sin(\varphi) \\ x_2(\varphi) = y(\varphi) = -l \cos(\varphi) \\ x_3(\varphi) = z(\varphi) = 0 \end{array} \right\} \quad x^2 + y^2 = l^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = l^2$$

$\hat{=}$ der Zwangsbedingung $z = 0$

d.h. beide Zwangsbedingungen sind für beliebige φ erfüllt

b, verallgemeinerte Geschwindigkeiten

Definition

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

c, kinetische und potentielle Energie

→ schreibe die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktionen der q_i und \dot{q}_i

für das ebene Pendel

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^3 \dot{x}_n^2, \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = l \dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ \dot{x}_2 = l \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{array} \quad (\text{Annahme: } l = \text{const.})$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (= T(\varphi, \dot{\varphi}))$$

$$V = mgy = -mgl \cos(\varphi) \quad (= V(\varphi))$$

d, Lagrange-Funktion

Def.:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

Kurznotation: $q = (q_1, \dots, q_f)$; $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Für das ebene Pendel:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi)$$

e, Aufstellen der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, f$$

(genauer: „Lagrange-Gleichungen 2. Art“)

Für das ebene Pendel $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \varphi}$

$$\frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}, \quad \varphi \text{ und } \dot{\varphi} \text{ werden als unabhängige Variable aufgefasst!}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi})}{\partial \varphi} = -mgl \sin(\varphi)$$

die Lagrange-Gleichung für das ebene Pendel lautet also:

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0 \quad (*)$$

f, Lösung der Lagrange-Gleichung

Für das ebene Pendel: (*) $\hat{=}$ gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung, nichtlinear!
 \hookrightarrow wg. $\sin(\varphi)$

\Rightarrow eine analytische Lösung ist nur möglich für kleine Auslenkungen, d.h. $|\varphi| \ll 1$

\rightarrow Näherung: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad \text{allgemeine Lösung: } \varphi(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

$a, b \in \mathbb{R}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

weitere Beispiele

1. Teilchen im Potential $V(\vec{r})$, keine Zwangsbedingungen

$$\rightarrow d=3, N=1, R=0 \quad \Rightarrow \quad f = 3 \cdot 1 - 0 = 3$$

verallgemeinerte Koordinaten: $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2$

potentielle Energie: $V = V(\vec{r}) = V(q_1, q_2, q_3)$

$$\Rightarrow \text{Lagrange-Funktion: } \boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - V(q_1, q_2, q_3)}$$

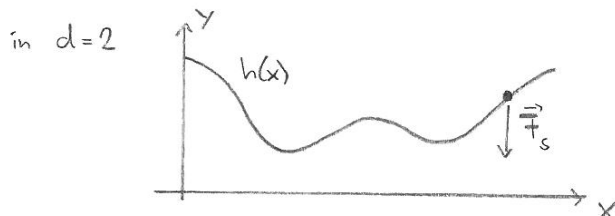
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \ddot{q}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, q_2, q_3) = \vec{F}_k \quad \rightarrow \quad \text{wegen } \vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

\Rightarrow ohne Zwangsbedingungen entsprechen die Lagrangegleichungen den

Newton'schen Bewegungsgleichungen: $m \ddot{q}_k = \vec{F}_k \quad \rightarrow \quad \boxed{m \ddot{\vec{q}} = \vec{F}}$

2. Bewegung längs einer gegebenen Kurve im Schwerfeld



$\rightarrow h(x)$ ist gegeben

$$\rightarrow \vec{F}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Zwangsbedingung: $y = h(x) \quad \rightarrow \quad R=1$

$$N=1 \quad \Rightarrow \quad f = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

verallgemeinerte Koordinate: $q = x$

kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad y(t) = h(x(t))$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} y(t) = \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{=h'(x)} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=\dot{x}(t)}$$

$$\Rightarrow T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 (1 + (h'(q))^2)$$

potentielle Energie

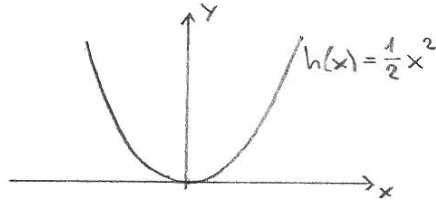
$$V = mgy \rightarrow V(q) = mgh(q)$$

⇒ Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 (1 + (h'(q))^2) - mgh(q)$$

Beispiel $h(q) = \frac{1}{2} q^2$

$$\rightarrow h'(q) = q$$



$$\rightarrow L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 (1 + q^2) - \frac{1}{2} mgq^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}(1+q^2) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}(1+q^2) + \underbrace{m\dot{q}^2 q \dot{q}}_{= 2mq\dot{q}^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = m\dot{q}^2 q - mgq$$

⇒ Lagrange-Gleichung:

$$\ddot{q}(1+q^2) + m\dot{q}^2 q - mgq = 0$$

→ nicht-linear!

1.6 Hamilton-Formalismus

gegeben ist die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ mit $q = (q_1, \dots, q_f)$
 $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Definition: verallgemeinerter Impuls (auch: kanonischer Impuls)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, f$$

Beispiele:

→ ebenes Pendel: $L(\psi, \dot{\psi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\psi}^2 + m g l \cos(\psi)$

$$\Rightarrow p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m l^2 \dot{\psi}$$

→ Teilchen im Potential $V(\vec{r})$ (keine Zwangsbedingungen):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - V(q)$$

$\Rightarrow p_i = m \dot{q}_i$, d.h. in diesem Fall entspricht p_i der i -ten Komponente des physikalischen Impulses

$$\hookrightarrow \vec{p} = m \vec{v}$$

jetzt: ersetze \dot{q}_i durch p_i

d.h.: schreibe die \dot{q}_i als Funktion der p_i (und q_i)

$$\rightarrow \dot{q}(q, p)$$

Definition: Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(q, p) p_i - L(q, \dot{q}(q, p))$$

Beispiele:

→ ebenes Pendel: $\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{m l^2}$ ($= \dot{\psi}(p_\psi)$)

$$\Rightarrow H(\psi, p_\psi) = \frac{p_\psi}{m l^2} p_\psi - \left[\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{p_\psi}{m l^2} \right)^2 + m g l \cos(\psi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{m l^2} - m g l \cos(\psi)$$

→ es gilt: $H = T + V$

→ Teilchen im Potential $V(\vec{r})$ (keine Zwangsbedingungen):

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m} \quad (= \dot{q}_i(p_i))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(q, p) &= \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{m} p_i - \left[\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \left(\frac{p_i}{m} \right)^2 - V(q) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + V(q) \end{aligned}$$

jetzt: die partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion (für den allgemeinen Fall)

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} p_i - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_k} L(q, \dot{q}(q, p))}_{\substack{\text{Lagrangegleichung} \\ = p_i \text{ (siehe Definition von } p_i)}} = \\ &= - \frac{\partial L}{\partial q_k} \stackrel{\downarrow}{=} - \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{= p_k} = - \dot{p}_k \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} p_i + \dot{q}_k - \sum_{i=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{= p_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

⇒ die Hamiltonschen Gleichungen (auch: kanonische Gleichungen)

$$\boxed{\dot{p}_k = - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_k} \quad , \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k} \quad (k=1, \dots, f)}$$

→ 2f Differentialgleichungen 1. Ordnung
(Lagrangegleichungen: f Dgl 2. Ordnung)

Beispiele

→ ebenes Pendel: $H(\varphi, p_\varphi) = \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{m l^2} - m g l \cos(\varphi)$

partielle Ableitungen: $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = m g l \sin(\varphi)$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m l^2}$$

Hamiltonsche Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{I : } \dot{p}_\varphi = -mgl \sin(\varphi) \\ \text{II : } \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} \end{array}$$

bilde $\frac{d}{dt} \text{II}$: $\ddot{\varphi} = \frac{1}{ml^2} \dot{p}_\varphi \stackrel{\text{I}}{=} -\frac{mgl}{ml^2} \sin(\varphi)$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0} \hat{=} \text{Lagrangegleichung, siehe Kap. 1.5}$

→ Teilchen im Potential $V(\vec{r})$ (keine Zwangsbedingungen)

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{q})$$

partielle Ableitungen : $\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k} = -F_k$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m}$$

Hamiltonsche Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{I : } \dot{p}_k = F_k \\ \text{II : } \dot{q}_k = \frac{p_k}{m} \end{array}$$

bilde $\frac{d}{dt} \text{II}$: $\ddot{q}_k = \frac{1}{m} \dot{p}_k \stackrel{\text{I}}{=} \frac{1}{m} F_k \rightarrow F_k = m\ddot{q}_k$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\ddot{\vec{q}}} \quad \checkmark$