Übungsaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Physik in zwei Semestern II

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla, J. Schmidt

WS 2013/14

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 29.10.2013, 10:00

Aufgabe 1: Wiederholung zur δ -Funktion

a) Berechnen Sie die Integrale:

$$\begin{array}{llll} i) & \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x-5\right) \mathrm{d}x & ii) & \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \delta\left(x-2\right) \mathrm{d}x \\ iii) & \int_{-8}^{10} \cos(x) \cdot \delta\left(2x-2\pi\right) \mathrm{d}x & iv) & \int_{-1}^{5} \cos(x) \cdot \delta\left(\sin\left(x\right)\right) \mathrm{d}x \end{array}$$

b) Beweisen Sie die folgende Vereinfachung.

$$\delta\left(x^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2x_0}\delta\left(x - x_0\right) + \frac{1}{2x_0}\delta\left(x + x_0\right)$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Operatorgleichungen

Eine Operatorgleichung gibt verschiedene Darstellungen eines Operators an. Das bedeutet: Angewendet müssen sie stets zum gleichen Ergebnis führen.

a) Prüfen Sie durch Anwendung beider Darstellungen auf die Funktion $\phi\left(x\right)$ ob eine Operatorgleichung vorliegt. ($\phi\left(x\right)$ dient hier als Platzhalter für eine beliebige Funktion)

$$i) \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1 \qquad ii) \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1 + x\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad iii) \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^2 = 2$$

Was ist der Unterschied zwischen i) und ii)? Warum sind i) und iii) i. A. keine Operatorgleichungen?

b) Vereinfachen Sie $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^2 = \ldots$, so dass eine Operatorgleichung vorliegt.

c) Kann man die Schrödingergleichung als Operatorgleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \stackrel{?}{=} -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\triangle + \mathrm{V}\left(\mathrm{r}\right)$$

verstehen? Begründen Sie Ihre Antwort!

(2 Punkte)

Aufgabe 3: Teilchen im würfelförmigen Kasten

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einem würfelförmigen Kasten mit Kantenlänge a. Das Potential ist dann gegeben durch

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{a}{2} < x,y,z < \frac{a}{2} \ , \\ \infty & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

a) Geben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Teilchen an.

b) Berechnen Sie das Energiespektrum des Teilchens und die entsprechenden normierten Eigenfunktionen. Verwenden Sie für die Eigenfunktionen folgenden Ansatz

$$\psi(x,y,z) = A \sin\left[k_x\left(x+\frac{a}{2}\right)\right] \sin\left[k_y\left(y+\frac{a}{2}\right)\right] \sin\left[k_z\left(z+\frac{a}{2}\right)\right] \quad .$$

Zeigen Sie, daß die erlaubten Werte für k_i durch drei ganze Zahlen $(n_x, n_y, n_z) > 0$ festgelegt sind und die Energieeigenwerte der Gleichung

$$E_{(n_x,n_y,n_z)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

genügen.

c) Berechnen Sie für den Grundzustand die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auffinden des Teilchens am Ort $\vec{r}$.

d) Wie lauten die fünf tiefsten Energieeigenwerte? Zu einigen Energien gibt es mehrere Eigenfunktionen; geben Sie jeweils die Zahl dieser (sog. entarteten) Zustände an.

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Orts- und Impulsunschärfe

Betrachten Sie jetzt das in der Vorlesung behandelte Problem eines Teilchens in einem eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf.

$$\mathrm{V}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & : \text{ für } 0 < x < L \\ \infty & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie für den Grundzustand die Erwartungswerte

$$\langle x \rangle \ , \ \langle x^2 \rangle \ , \ \langle p_x \rangle \ , \ \langle p_x^2 \rangle \ .$$

Zeigen Sie, daß daraus für die Orts- und Impulsunschärfe folgt:

$$\Delta x = L\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}} \ , \quad \Delta p_x = \frac{\hbar\pi}{L} \ .$$

(4 Punkte)