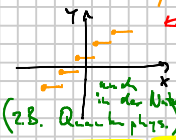
Notiztitel 17.09.2007

Funktionen

(wie Folgen, nur kontinuierlich)

Eine Fkt. f ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet: $y = f(x)$ → reelle Fkt.! eindeutig!

un-Stetig

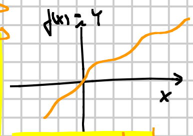


(z.B. Quantenphys.) auch in der Natur

f ist stetig in x_0, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

oder: zu jeder ε-Umgebung $|y - y_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ gibt es eine δ-Umgeb. $|x - x_0| < \delta$, $\delta > 0$

$\varepsilon > 0$ x-Werte werden abgebildet

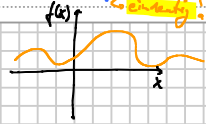


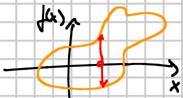
eineindeutig!

→ monoton: steigend / fallend / streng

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$\leq$, $<$, $>$



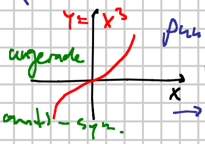


nicht eindeutig! (ein x hat 2 y-Werte)

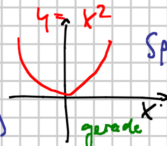
oder: "Zwischenwertsatz" Ist $f(x)$ stetig im Intervall $a \leq x \leq b$ und $y \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists\, f(x) = y$

Eigenschaften von Funktionen: Monotonie / Eineindeutigkeit – Beschränktheit – Grenzwerte → siehe Folgen!

zusätzlich
- Stetigkeit: $(x \in D \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N})$, s.o.
- Symmetrie:



$y = x^3$ ungerade, anti-sym., Punkt-Sym. (zu $x = y = 0$) → $f(x) = -f(-x)$

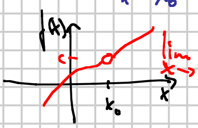


$y = x^2$ Spiegel-Sym. (zu $x = 0$) gerade sym. → $f(x) = f(-x)$

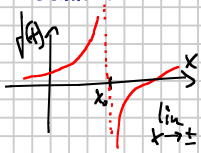
- Singularitäten
  4 Polstellen:
  → Definitionslücken (z.B. 0-Stellen in rationalen Funktionen)
  –"– können trotzdem Häufungspunkte in D sein: "∞-viele x-Werte in ε-Umgebung"
  –"– einen Grenzwert haben:

(Folgen nur bei $n \to \infty$)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = C$, $\pm\infty$ nämlich der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für alle Folgen $x_n \to x_0$



$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$



$\lim_{x\to\pm x_0} f(x) = \pm\infty$

Bsp.: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $(x \neq 1)$ mit Folge $x_n \to 1$, z.B. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ "hebbare Lücke"

$$f(x_n) = \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1}{(1+\frac{1}{n}) - 1} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1}{1/n} = 2 + \frac{1}{n} \to 2$$

Elementare Funktionen (die "Grundausstattung"):

- Rationale Fktn. (Hyperbeln & Polynome)
- Trigonometrische Fktn. (sin, cos, tan, cotan)
- Exponentialfkt. Hyperbolische Fktn.

und Umkehrfkt.

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) := g(x)$

$g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$

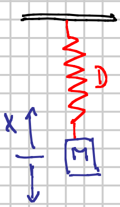
$D_f = W_g \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} D_g = W_f$

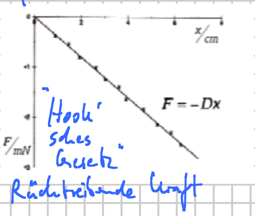
- Wurzelfkt.
- Zyklometrische Fktn.
- Logarithmen Areafktn.

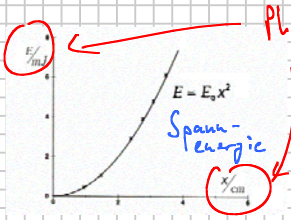
Und natürlich "Schachtelungen" (mittelbare Fktn.) $y = f(g(h(x)))$ oder $(f \circ g \circ h)(x)$ ...

Ein paar Beispiele aus der Physik: (nicht alle abzeichnen!)

→ Das Federpendel

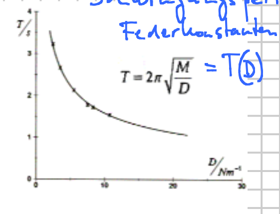


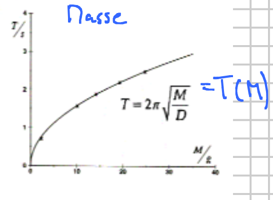




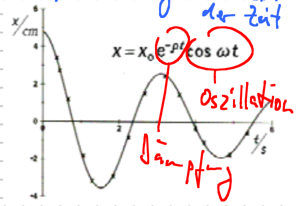
Physiker haben Einheit

Schwingungsperiode als Fkt. der Federkonstanten / Masse





Auslenkung als Fkt. der Zeit



Rationale Funktionen:

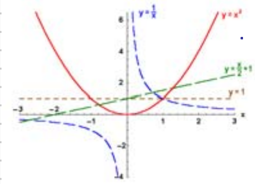
- **Polynome** $y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$

  → Const., lineare Fkt., Parabeln

  z.B. $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ → $x_{min} = -\frac{b}{2a}$

  Nullstellen: $x_\pm = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

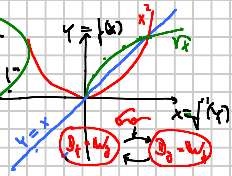
  Normalform: $P_2(x) = a(x-x_-)(x-x_+)$



- **Hyperbeln** $y = \frac{1}{P_n(x)}$ → Polstellen

- **Allgemein** $f(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}{\sum_{j=1}^{m} b_j x^j}$

Umkehrfkten lassen sich durch Spiegelung an $y = x$ darstellen!

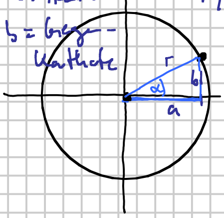


→ Umkehrfkt.: Wurzelfkt. $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

Trigonometrische Funktionen (Winkelfkt.)

a: Ankathete

b = Gegenkathete



Pythagoras: $a^2 + b^2 = r^2$ (= 1 im Einheitskreis)

$b = \pm\sqrt{r^2 - a^2} = r \cdot \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{b}{r}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$

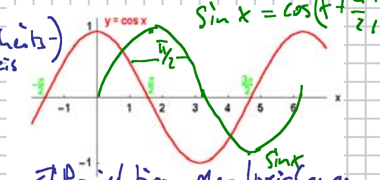
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

gleichförmige Kreisbew.

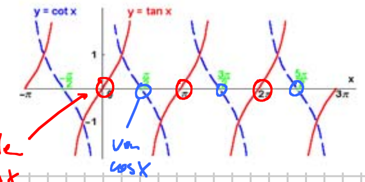
→ $\alpha = \omega t =: x$

→ Projektion der Kreisbewegung

$\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$



Polstellen → Nullstelle von sin x

Sehr Nützlich:

Additionstheoreme!

(z.B. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ und einige mehr ...)

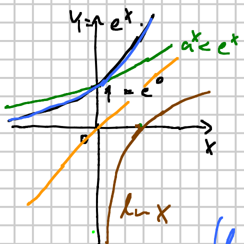
Umkehrfkten: Zyklometrische Fktn (o. inverse trigonometrische)

→ arcsin, arccos, arctan, arccot

Exponentialfunkt.

$f(x) = e^x = \exp(x)$ mit $e = e^1 = 2{,}7182818\ldots$

→ streng monoton & immer positiv



Rechenregel $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

auch andere Basis möglich $a^x \gtrless e^x$ $(a \lessgtr e)$

Umkehrfkt.:

Logarithmus $f(x) = \ln(x)$ ⇒ $\ln e^x = x$ $(x > 0\,!)$

($\ln(x)$ → Mit welcher Zahl muss man e potenzieren um x zu erhalten)

→ Rechenregeln $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^2) = 2 \cdot \ln x$

Logarithmus auch zu anderer Basis möglich: z.B. $\lg(10^x) = x$ Dekadisch

allgemein: $\log_a(a^x) = x$

Etwas spezieller: Hyperbolische Fktn.

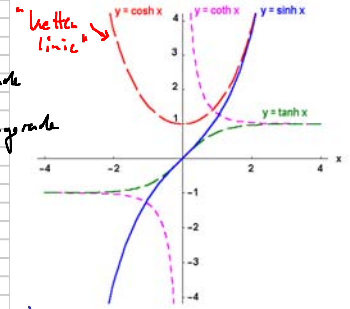
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\coth x = \frac{1}{\tanh x}$

$$\begin{array}{r} \cosh^2 x \leftarrow \text{gerade} \\ -\ \sinh^2 x \leftarrow \text{ungerade} \\ \hline 1 \end{array}$$

„Kettenlinie"



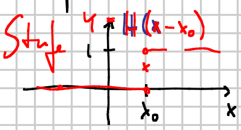
Umkehrfkt.: Area-Fktn. z.B. $\mathrm{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\mathrm{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

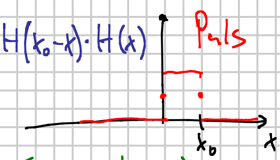
„Artifiziell": Heavyside-Fkt.

Stufe



$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$H(x_0 - x) \cdot H(x)$ Puls



(zur Beschreibung von „Schalt-Experimenten ...")