Integration → „Umkehrung der Differentiation"

Bsp: Masse wird mit konstanter Kraft (z.B. Gravitation) beschleunigt:

$F = m \cdot a \;\rightarrow\; a = \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$ Geschwindigkeitsänderung pro Zeitintervall (Steigungsdreieck)

$v(t) \leftarrow$ Alle Änderungen vom Beginn der Kraftwirkung (z.B. t_a) bis zur Zeit t_b aufsummieren!

$\Delta t = (t_b - t_a)/m$

$$v(t_b) = v(t_a) + \sum_{n=1}^{m} \underbrace{a_n \Delta t}_{\Delta v_n} \qquad (a_n = a = \text{const.})$$

$$= v(t_a) + m\,a\,\Delta t = v(t_a) + a\,(t_b - t_a)$$

Für $m \rightarrow \infty$: $\qquad v = a \cdot t \quad$ (für $t_a := 0,\ t_b = t$) ✓

$$v(t_b) = v(t_a) + \int_{t_a}^{t_b} a(t)\,dt$$

„Aufsummieren von Differentialen" → Integrieren

Nochmal mit $s(t)$:

Der zurückgelegte Gesamtweg ist die Summe aller zeitlichen Wegänderungen $\frac{ds}{dt} = v$ über die betrachtete Gesamtzeit

$$s(t_b) = s(t_a) + \int ds = s(t_a) + \int \frac{ds}{dt}\,dt$$

$$= s(t_a) + \int_{t_a}^{t_b} v(t)\,dt$$

mit $t_a := 0$, $v(t) = a \cdot t$: $\quad s(t) = \frac{1}{2} a t^2$

„Ableiten"

„Integrieren"

Allgemein:

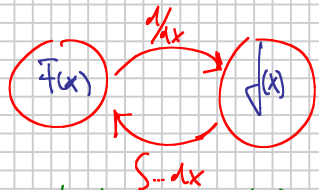
$f(x)$ stetig in $[a,b]$:

$$\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) =: F(x)\Big|_a^b$$

mit $F'(x) = f(x)$

Bestimmtes Integral

$F(x)$ heißt Stammfkt. zu $f(x)$



allerdings nur bis auf eine Konstante bestimmt

Unbestimmtes Integral:

$$\int_a^{x} f(t)\,dt = F_a(x)$$

$$F_a(x)' = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

→ Das Integral als Fkt. seiner obere Grenze

→ Das Differential eines unbestimmten Integrals als Integrand an der obere Grenze

$G(x) = F(x) + C \Rightarrow G'(x) = f(x)$

↳ im unbestimmten Integral durch untere Grenze festgelegt!

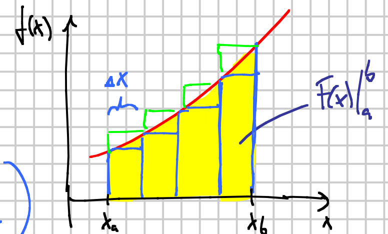
oder: $\int f(x)\,dx := F(x) + C$

→ Schar aller Stammfkt. zu $f(x)$

Das Integral anschaulich:

(Ableitung → Steigung der Kurve)

Integral → Fläche unter der Kurve (und oberhalb $y = 0$)



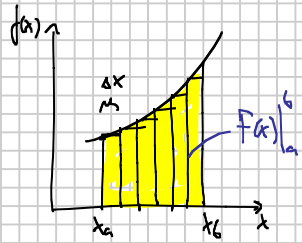
$$F(x)\Big|_a^b = \sum_{n=0}^{m-1} f(x_a + n\,\Delta x) \cdot \Delta x \qquad \text{(Riemann-Summe)}$$

$dx \rightarrow 0,\ m \rightarrow \infty$ $\qquad F(x)\Big|_a^b = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx$

↳ Diskretes Aufsummieren → numerische Methode zur Integration (mittels Computer)

(und „Fläche über der Kurve" zählt negativ!)

Das Integral anschaulich:

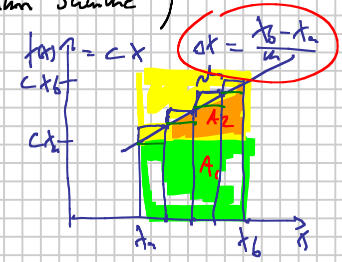


(Ableitung → Steigung der Kurve)

Integral → Fläche unter der Kurve
(und oberhalb $y=0$)

(Bem.: "Flächen über f(x) zählen negativ!)

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(x_a + n\Delta x)\cdot \Delta x \qquad (\text{"Riemann-Summe"})$$



Bsp: $f(x) = c\cdot x$

$$S_m = \sum_{\substack{n=1\\ n=0}}^{\substack{m-1\\ m}} c\cdot(x_a + n\cdot\Delta x)\Delta x$$

$$= \sum_{n=1}^{m}\left(c\, x_a \Delta x + n\cdot c\cdot \Delta x^2\right)$$

$$= m\cdot c\, x_a \Delta x + c\cdot \Delta x^2 \frac{(m+1)m}{2}$$

$$= c\cdot x_a(x_b - x_a) + c\frac{(m+1)m}{2}\left(\frac{x_b - x_a}{m}\right)^2$$

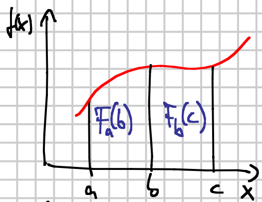
$$= c\cdot x_a(x_b - x_a) + c\frac{(x_b - x_a)^2}{2} + \cancel{\frac{c}{2m}(x_b - x_a)^2}$$

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \int_a^b m x\, dx = \underbrace{c\, x_a(x_b - x_a)}_{A_1} + \underbrace{\frac{(x_b - x_a)^2}{2}c}_{A_2}$$

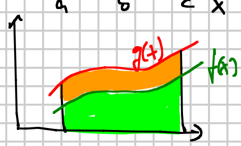
Eigenschaften des Integrals

- Linearität: $\int_a^b \left(A f(x) + B g(x)\right)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$

- Intervalladdition: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

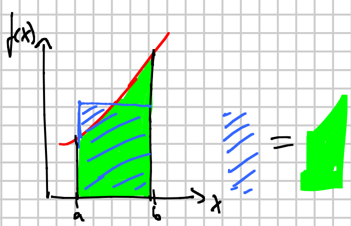


- Ungleichungen & Abschätzungen: $f(x) \le g(x)$ in $[a,b]$
  $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

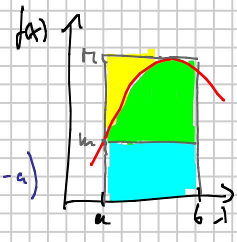


- "Dreiecksungleichung" $(|a+b| \le |a| + |b|)$: $\left|\int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b)$

- Mittelwertsatz der Integralrechnung:
  $f(x)$ stetig & beschränkt in $[a,b]$
  $\Rightarrow \exists\, c: \; f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$



- Abschätzung durch Mittelwertsatz: $m = \min(f(x))_{a\le x\le b}$
  $M = \max(f(x))_{\dots}$
  $\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$



"Standard-Stammfunktionen" ("Ableitungstabelle rückwärts")

$f(x)$	$x^a \; (a \neq -1)$	$\cos x$	$\sin x$	$1/\cos^2 x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; (\lvert x \rvert < 1)$	...
$F(x)$	$\frac{1}{a+1} a^{a+1}$	$\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\arcsin x$	

$f(x)$	e^x	a^x	$\frac{1}{x}$	0
$F(x)$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\ln\lvert x \rvert$	Const.

Integrationsregeln:

- Lineare Zerlegung: (siehe "Linearität")

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

z.B. $\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx$

$$= [x]_0^1 - \left[\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= 1 - 0 - 2/3 + 0 + \tfrac{1}{5} - 0 = \frac{8}{15}$$

Substitution ("Kettenregel rückwärts")

- $x = g(y)$, $y_a = g^{-1}(x_a)$, $y_b = g^{-1}(x_b)$

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx = \int_{y_a}^{y_b} f(g(y))\frac{dx}{dy}\,dy = \int_{y_a}^{y_b} f(g(y))\cdot g'(y)\,dy$$

z.B.: $\int_0^{\pi} \cos \omega t\,dt = \int_0^{\omega\pi} \cos y \cdot \frac{1}{\omega}\,dy = \frac{1}{\omega}[\sin y]_0^{\omega\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{\omega}\sin \omega\pi}}$

$y := g^{-1}(t) = \omega t$

$t = g(y) = \frac{1}{\omega}y$

$dt = \frac{1}{\omega}\,dy$

$y_a = \omega t_a$, $y_b = \omega t_b$

Partielle Integration ("Produktregel rückwärts")

$\hookrightarrow (fg)' = f'g + g'f$

$$\Rightarrow \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b g'(x)f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx}$$

↳ hoffentlich leichter zu lösen ...

z.B.: $f'(x) = x$, $g(x) = \ln x$

$$\Rightarrow \int_a^b x \ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot \ln x\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

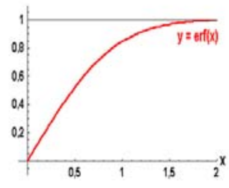
$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^b - \left[\frac{x^2}{4}\right]_a^b = \underline{\underline{\frac{b^2}{2}\ln b - \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}}}$$

"Problematische" Integrale

- Integralfunktionen

Manchmal lassen sich unbestimmte Integrale einfach nicht durch elementare (Stamm-)Fkt. ausdrücken. ↯

"Lösung": Man gibt den analytisch unlösbaren Int. einen Namen und definiert so eine neue Fkt.! (kann man dann in Tabellen nachschlagen oder numerisch berechnen ...)



z.B. $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

"error function"

- Uneigentliche Integrale

→ "Integrale über unendlich ausgedehntes Gebiet"

a) entweder Integrationsgrenze → ∞ oder $t \to \infty$

b) Integrand → ∞ $f(t) \to \infty$

→ Man muss die Integrale im "Limes" betrachten

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b;\, t<b} \int_a^t f(x)\,dx$$

a) z.B.: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[1-e^{-t}\right] = 1-0 = \underline{\underline{1}}$

$$\int_0^t e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1-e^{-t}$$

b) z.B.: $\int_0^1 x^{\varepsilon-1}\,dx = \lim_{\eta\to+0}\int_\eta^1 x^{\varepsilon-1}\,dx = \lim_{\eta\to+0}\left[\frac{x^{\varepsilon-1+1}}{\varepsilon-1+1}\right]_\eta^1 =$

$$= \frac{1}{\varepsilon} - \lim_{\eta\to+0}\frac{\eta^{\varepsilon}}{\varepsilon} = \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon}}}$$