– Teil A – KTPI 2. Prüfung SS2015

1) a) Kräftefreie Bewegung ist geradlinig-gleichförmig

$m_i \langle \ddot{\gamma}_i(t), - \rangle = F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_N, \dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_N; t)(-)$ (3)

Übt A eine Kraft auf B aus („actio"), so wirkt eine gleich große, entgegen gerichtete Kraft von B auf A.

b) $g^*(t,x) = (t+b, Rx + wt + a)$

a, b Raumzeit-Translation
R Rotation
w Boost (2)

c) Die Naturgesetze sind Galilei-invariant. (1)

d) $O(V) = \{ R \in End(V) \mid \langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle \ \forall v, v' \in V \}$ je (1)

$so(V) = \{ A \in End(V) \mid A = -A^t \}$

$q(t) = \gamma_i(t) - \alpha(t)$, $q := \gamma_i(0) - \alpha(0)$ für einen Punkt eines starren Körpers. Es ist $q(t) = R(t)q \Rightarrow \dot{q}(t) = \dot{R}(t)q = \underbrace{\dot{R}(t)R^{-1}}_{=: \omega(t)} Rq$.

$(\omega(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t)$ müsste auch volle Punktzahl erhalten)

e) $\alpha \wedge * \beta = (\alpha, \beta)\, dVol \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M)$ (1)

f) Das $\underbrace{\text{Energieellipsoid}}_{(a)}$ rollt $\underbrace{\text{ohne Schlupf}}_{(b)}$ auf der $\underbrace{\text{invariablen Ebene}}_{(c)}$.

(4)

(a) Lösungsmenge von $2T(\omega) = I^R(\omega, \omega) = const.$
(b) Berührpunkt des Ellipsoid und der invariablen Ebene ist momentan in Ruhe.
(c) Lösungsmenge von $L(\omega) = const.$

g) $(df, dg)_U = \int_{\partial U} f * dg - \int_U f * \Delta g$ je (1)

$\int_{\partial U} (f * dg - g * df) = \int_U (f * \Delta g - g * \Delta f)$

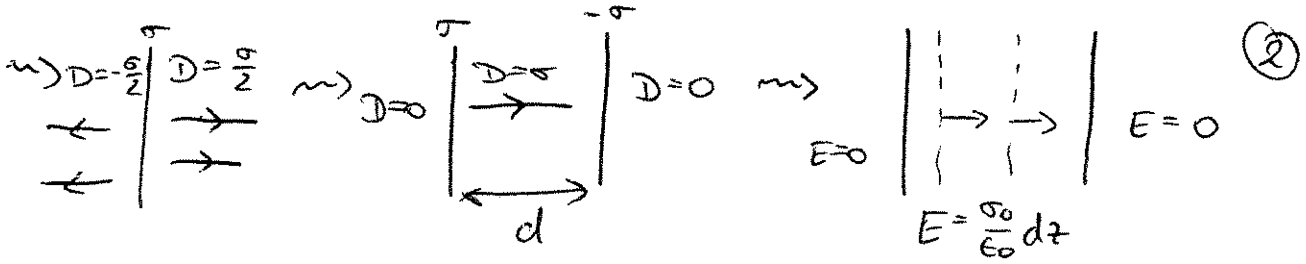
h) („Methode der Doppelplatten") Messe $\int_S D$.

- Doppelplatte herstellen, die S nachgebildet ist, Platten in Kontakt bringen und el. Neutralität herstellen.
- Platten zum Messort bringen und trennen.
- $Q[S^+]$ auf denjenigen Metallkörper messen, aus dem der Vektor der äußeren Orientierung von S herauszeigt. $Q[S^+] = \int_S D$.

2) Die Flächengeschwindigkeit ist proportional zu $\Omega(\gamma,\dot\gamma)$ (1)

$$\frac{d}{dt}\Omega(\gamma,\dot\gamma) = \underbrace{\Omega(\dot\gamma,\dot\gamma)}_{0} + \underbrace{\Omega(\gamma,\ddot\gamma)}_{=0,\ \text{da}\ \ddot\gamma \propto \gamma} \qquad (2)$$

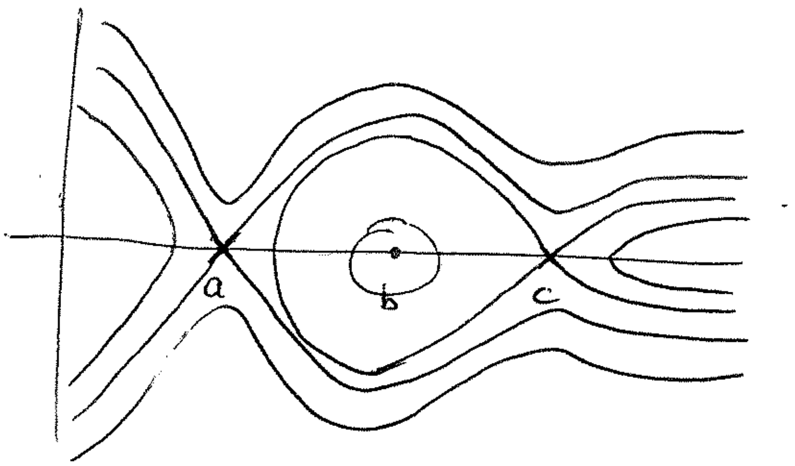
3) Platte mit Flächenladungsdichte $\sigma = \sigma_0 [dx \wedge dy, R]$



$\rightsquigarrow$ Spannung $U = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d \underset{(1)}{=} \frac{Q}{A\epsilon_0} d \rightsquigarrow \frac{C}{A} = \frac{\epsilon_0}{d}$ (1)

(1) für Visualisierung

4)



(3)

– Teil B –

5) a) $\Delta = -\partial C d$

$$M(\partial) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M(\Delta) = \begin{pmatrix} -C_\alpha & C_\alpha & 0 \\ C_\alpha & -(C_\alpha + C_\beta) & C_\beta \\ 0 & C_\beta & -C_\beta \end{pmatrix}$$ 2

b) $\rho^{(i)} = 0 \qquad \Phi^{(b)}$ vorgegeben

Mögliche Wahl: $\rho(B) = 0, \quad \Phi(A) = 0, \quad \Phi(C) \neq 0$ fest 1

c) $(-\Delta_{int} G)(\cdot, p) = 1$ für alle inneren Knoten p

$G(A, B) = 0$ falls A o. B am Rand 1

$G(A, p)$ ist das el. Potential in A wenn in in p eine Einheitsladung sitzt und der Rand geerdet ist.

d) Hier: $M(-\Delta_{int}) = C_\alpha + C_\beta \rightsquigarrow G(B, B) = \frac{1}{C_\alpha + C_\beta}$. 1

e) $$M(\Delta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/C_\alpha + C_\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha / C_\alpha + C_\beta \\ -1 \\ C_\beta / C_\alpha + C_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_A(B) \\ -1 \\ k_C(B) \end{pmatrix}$$ 1

$$\Phi^{(D)}(B) = \underbrace{\Phi(A)}_{0} k_A(B) + \Phi(C) k_C(B) = \frac{C_\beta}{C_\alpha + C_\beta} \Phi(C)$$ 1

f) $$\rho = -M(\Delta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_\beta}{C_\alpha + C_\beta} \\ 1 \end{pmatrix} \Phi(C) = \underbrace{\frac{C_\alpha C_\beta}{C_\alpha + C_\beta}}_{= C_{ges}} \Phi(C) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1

6) $$H = \frac{1}{2} (\dot q_1 \ \dot q_2) \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (q_1 \ q_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$ 1

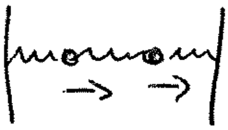
char. Frequenzen: $$0 \overset{!}{=} \mathrm{Det}(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & 2k - \lambda m \end{vmatrix}$$ 2

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{k}{m} \ \vee \ \lambda_2 = \frac{3k}{m}$$

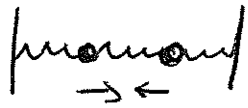
Normalschwingungen:

zu λ_1: $$(Q_1 \ Q_2) \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$ 2

$Q_1 := 1 \rightsquigarrow Q_2 = 1$

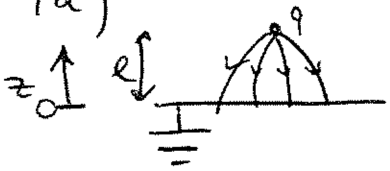


zu λ_2: $$(Q_1 \ Q_2) \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

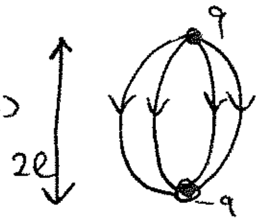
 2

$Q_1 := 1 \rightsquigarrow Q_2 = -1$

7a)



$\Leftrightarrow$

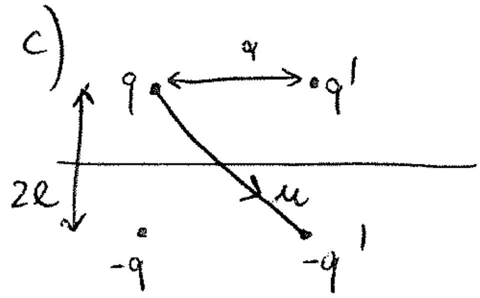


$\Rightarrow \quad F_z = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2}$ (2)

b) In der linken Anordnung ist $D_{z<0} = 0$, laut Anschluss-bedingung springt zudem die Tangential Komponente von D um σ.
In der x-y-Ebene hat man in der rechten Anordnung

$$D = -2\cdot\frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{(x^2+y^2+l^2)^{3/2}} \quad (= \sigma.)$$ (3)

c)



$\|u\| = (4l^2 + a^2)$

$I^{-1}(\hat{u}) = \frac{a\,dx - 2l\,dz}{\|u\|}$

(2)

$$\Rightarrow \quad 4\pi\epsilon_0 F = \frac{-q^2}{4l^2}dz - \frac{qq'}{a^2}dx + \frac{qq'}{u^2}\,\frac{a\,dx - 2l\,dz}{\|u\|}$$

$$\Leftrightarrow \quad F = \dots$$

8) a) $J_{ij} q_k = e_i (q_k)_j - e_j (q_k)_i$

$$\Rightarrow I(J_{yz}, J_{yz}) = \sum_k m_k \langle J_{yz} q_k , J_{yz} q_k \rangle$$

$$= \sum_k m_k \langle e_y (q_k)_z - e_z (q_k)_y \,;\, e_y (q_k)_z - e_z (q_k)_y \rangle$$

$$= \sum_k m_k \left((q_k)_z^2 + (q_k)_y^2 \right) \equiv \sum_k m_k \left(z_k^2 + y_k^2 \right)$$

$$I(J_{yz}, J_{xz}) = \sum_k m_k (-x_k y_k) \quad \text{analog}$$ 2

b) Wähle die Koordinaten so, dass e_z orthogonal zur Symmetrieebene ist und bezeichne die Spiegelung an der Symmetrieebene mit S.

z-Koordinate des Schwerpunkts: $\int_U z\rho = \int_{S(U)} z\rho = \int_U S^*(z\rho) = -\int_U z\rho = 0$

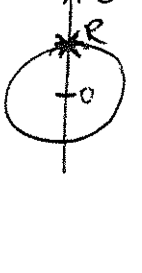
Aus denselben Gründen ist $\int_U xz\rho = \int_U yz\rho = 0$ 3

c) Die Argumentation aus b) trifft auf alle Koordinatenebenen zu $\Rightarrow$ I hat bzgl jeder ONB eine diagonale Matrixdarstellung. Aus Symmetriegründen gibt es nur <u>ein</u> Hauptträgheitsmoment.

$$I_z = \rho_0 \int_K (x^2+y^2)\, dx \wedge dy \wedge dz = \rho_0 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} (r^2 \sin^2\theta) \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \rho_0 \cdot \frac{1}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi \left(= \frac{2}{5} M R^2 \right)$$ 2

d)



$\rightsquigarrow$ Satz von Steiner

$$M(I) = I_z \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} MR^2 & & \\ & MR^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ 2

9) a)

$$\left.\begin{array}{l} m_1\langle \ddot{r}_1, -\rangle = F \\ m_2\langle \ddot{r}_2, -\rangle = -F \end{array}\right] (+) \rightsquigarrow \langle \underbrace{m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2}_{= M\ddot{R}}, -\rangle = 0$$

(2)

b) durch m_i teilen und Differenz bilden:

$$\langle \ddot{q}, -\rangle = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F$$

(2)

$$\Leftrightarrow \langle m\ddot{q}, -\rangle = F \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

c) $L = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p)$

$$\Rightarrow L f_1 = p\left\langle q, \frac{q}{\|q\|}\right\rangle - \mathcal{I}(q)\left\langle \mathcal{I}^{-1}(p), \frac{q}{\|q\|}\right\rangle$$

$$= \|q\|\, p - \mathcal{I}(q)\left\langle \underbrace{\mathcal{I}^{-1}(p_\parallel)}_{= \|p_\parallel\| \frac{q}{\|q\|}} + \mathcal{I}^{-1}(p_\perp), \frac{q}{\|q\|}\right\rangle$$

$$= \|q\| \underbrace{p}_{= p_\perp + p_\parallel} - \|p_\parallel\|\, \mathcal{I}(q)$$

(2)

$$= \|q\|\,\|p_\perp\| \frac{p_\perp}{\|p_\parallel\|} \underbrace{+ \|q\|\, p_\parallel - \|p_\parallel\|\, \mathcal{I}(q)}_{= 0}$$

d)

$$E_{ges} = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(|q|) = \frac{\|p_\parallel\|^2}{2m} + \frac{\|p_\perp\|^2}{2m} + \phi(\|q\|)$$

$$= \frac{\|p_\parallel\|^2}{2m} \underbrace{+ \frac{|L|^2}{2m\|q\|^2} + \phi(\|q\|)}_{= V_{eff}}$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

(2)

$\uparrow$

$\|p_\parallel\| = m\dot{r}$, $r := \|q\|$