Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 10

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 13. Januar 2017, 12:00 Uhr*

1. Harmonische Kette (9 Punkte)

Wir betrachten eine Kette von $N+1$ Kugeln mit Koordinaten $\vec{r}_i$, $i = 0, ..., N$, die durch Federn mit der Federkonstante D verbunden sind. Das Potential einer Feder ist durch $V(d) = \frac{1}{2}D(d - d_0)^2$ gegeben, wobei d der Abstand der Kugeln und d_0 die Länge der entspannten Feder ist. Die erste Kugel sei am Ursprung, $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$, und die letzte bei $\vec{r}_N = (L, 0, 0)$ eingespannt. In der Vorlesung wurde der Grenzfall $N \to \infty$ behandelt (Feldtheorie). Wir wollen jetzt das Problem für endliches N lösen.

a) Wie betrachten zuerst den Fall, dass sich die Kugeln nur entlang der x-Achse bewegen können. Stellen Sie die Lagrangefunktion der Kugeln 1 bis $N-1$ auf und geben Sie die $N-1$ Euler-Lagrange Gleichungen an.

b) Ignorieren Sie vorerst die Randbedinungen und lösen Sie die Gleichungen mit dem Ansatz

$$x_n(t) = x_n^0 + \mathrm{Re}[ae^{i(kx_n^0 - \omega t)}] \quad \text{mit} \quad x_n^0 = L\frac{n}{N},\ a \in \mathbb{C} \tag{1}$$

und bestimmen sie die zwei möglichen Werte von ω als Funktion von k. Kombinieren Sie die Lösungen um die Randbedingung zu erfüllen (siehe Vorlesung). Welche Werte von k und ω treten hierbei auf?

c) Nehmen wir nun an, die Kugeln können sich zusätzlich auch in y-Richtung bewegen. Im Allgemeinen gebe es eine endliche Vorspannung der Kette, d.h. $d \geq d_0$ (Ohne Punkte: Was passiert falls $d < d_0$?). Betrachten Sie den Fall kleiner Auslenkungen und nähern Sie bis zu quadratischer Ordnung in x und y-Richtung. Stellen Sie erneut die Lagrangefunktion der Kugeln 1 bis $N-1$ auf und geben Sie die $N-1$ Euler-Lagrange Gleichungen an.

2. Die Gitarre (9 Punkte)

In der Vorlesung wurde die unter Spannung stehende Gitarrensaite analysiert, welche entlang der y-Achse schwingen kann. Die Auslenkung $\xi(x, t)$ der Saite als Funktion von Ort x und Zeit t wird durch die Wellengleichung und deren allgemeine Lösung

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n \sin\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right)\right] \tag{2}$$

beschrieben. Die fest eingespannten Enden der Saite werden durch die Randbedingungen $\xi(x = 0, t) = \xi(x = L, t) = 0$ fixiert.

a) Zeigen Sie, dass die gegebene Lösung tatsächlich die Randbedingungen erfüllt.

Sei nun die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ auf die Funktion $h(x)$ fixiert. Die Randbedingungen sind dementsprechend

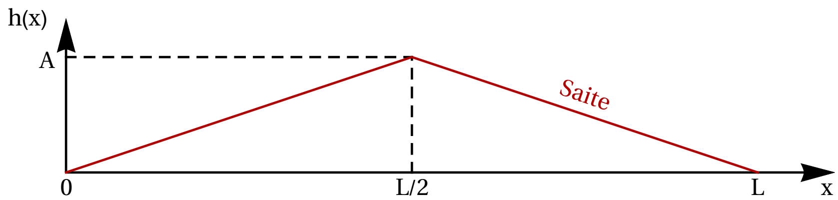
$$\xi(x, t = 0) = h(x), \qquad \dot{\xi}(x, t = 0) = 0. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, dass $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ und ferner $a_n = 0 \; \forall n$ folgt.

c) Zeigen Sie nun, dass die Koeffizienten der Fourierreihe von $h(x)$ gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) h(x) \tag{4}$$

d) Wir greifen nun die Gitarrensaite in der Mitte (bei $x = L/2$) und ziehen sie in die Auslenkung A. Die restliche Saite wird durch die direkte Verbindung mit den beiden Endpunkten beschrieben. Sie verbindet also auf geradem Weg die Punkte $\xi(0, 0) = 0$ und $\xi(L/2, 0) = A$, sowie die Punkte $\xi(L/2, 0) = A$ und $\xi(L, 0) = 0$ (siehe Skizze).



Stellen Sie die Funktion $h(x)$ auf, berechnen Sie die Koeffizienten b_n für diese Anfangsbedingung und geben Sie die volle Zeitabhängigkeit von $\xi(x, t)$ an.

e) Wie Sie in der Vorlesung gelernt haben, kann man zeigen, dass die Wellengleichung allgemein durch Funktionen von der Form $\psi(x \pm vt)$ gelöst wird. Nutzen Sie das Additionstheorem für den Sinus,

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{5}$$

um die Lösung $\xi(x, t)$ aus Teil (d) in diese Form zu bringen und bestimmen Sie die Geschwindigkeit v. Nutzen Sie diese Schreibweise, um die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \frac{1}{2}T$ zu skizzieren, wobei T die Dauer einer vollen Schwingungsperiode ist.
Hinweis: Sie benötigen dazu eine Funktion $H(x)$, welche die Funktion $h(x)$ auf ein Gebiet außerhalb des sprünglichen Definitionsbereichs $x \in [0, L]$ erweitert. Sie können aus Aufgabenteil b entnehmen, dass $H(x)$ eine asymmetrische Fortsetzung der Funktion $h(x)$ ist (also eine Zig-zag-Linie) mit der Periodizität $2L$ (brauchen Sie nicht zu zeigen). Sie brauchen diese Funktion auch nicht explizit aufzuschreiben, aber eine Skizze könnte weiterhelfen.

3. Wiederholung Lagrangeformalismus (0 Punkte)

(Ohne Punkte) Wiederholen Sie die Grundideen der Lagrangemechanik!