Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 11

http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 20. Januar 2017, 12:00 Uhr*

1. Legendretransformation (2 Punkte)

Die Legendretransformierte einer Funktion $f(x)$ sei

$$\tilde{f}(y) = xy - f(x)|_{y=f'(x)} = x(y)y - f(x(y)). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für $f''(x) > 0$ die folgenden Aussagen gelten. Eine kurze, anschauliche Begründung ist hier ausreichend.

a) $f'(x) = y$ ist eindeutig nach x auflösbar.

b) Die Transformierte ist $\tilde{f}(y) = \max_x (xy - f(x))$.

2. Hamiltonfunktion (9 Punkte)

Folgend betrachten wir ein paar uns bereits bekannte Beispiele von Lagrangefunktionen. Leiten Sie die jeweils zugehörige Hamiltonfunktion her und bestimmen Sie daraus die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie anschließend, dass Sie durch eine erneute Legendretransformation der Hamiltonfunktion wieder die ursprüngliche Lagrangefunktion erhalten.

a) Das Pendel (Blatt 7, Aufgabe 3a):

$$L(\phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl\cos\phi \tag{2}$$

b) Das Pendel mit zeitlich veränderlicher Fadenlänge (Blatt 7, Aufgabe 3b):

$$L(\phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\phi}^2\right) + mgl\cos\phi \tag{3}$$

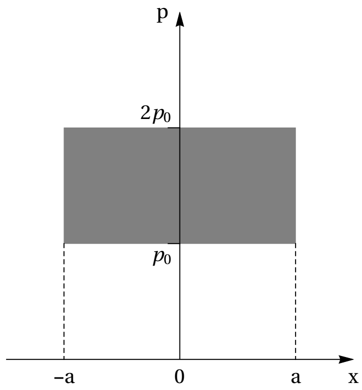
c) Das Kapitza-Pendel (Blatt 9, Aufgabe 2):

$$L(\phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mal\Omega^2\cos(\Omega t)\cos\phi - mgl\cos\phi \tag{4}$$

d) Das Pendel mit beweglicher Aufhängung (Blatt 9, Aufgabe 1):

$$L(x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}, t) = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\phi}\cos\phi + l^2\dot{\phi}^2) + m_2 gl\cos\phi \tag{5}$$

3. Liouville Theorem (9 Punkte)



In der Vorlesung haben Sie das Liouville Theorem kennengelernt: Bewegungen in dem von generalisierten Koordinaten $q_1, ..., q_f$ und Impulsen $p_1, ..., p_f$ aufgespannten Phasenraum sind volumenerhaltend. Wir beschränken uns in dieser Aufgabe auf eine Beschreibung in einer Raumdimension mittels der Ortskoordinate x und der Impulskoordinate p.
Betrachten wir ein Ensamble von vielen freien (und identischen) Teilchen, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ortsintervall $[-a, a]$ befinden und Geschwindigkeiten im Bereich $[p_0, 2p_0]$ haben. Das eingeschlossene Phasenraumvolumen stellen wir – wie in der Skizze gezeigt – grafisch durch eine Fläche im Phasenraum dar.

a) Geben Sie die Hamiltonfunktion eines Teilchens an. Skizzieren Sie das eingeschlossene Phasenraumvolumen zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$. Argumentieren Sie, dass dieses zu allen späteren Zeiten $t > 0$ konstant bleibt.

b) Nehmen wir nun an, dass an der Stelle $x_0 = a$ das Potential eine Stufe von $V = 0$ auf $V = \frac{p_0^2}{2m}$ habe. Geben Sie die Hamiltonfunktion eines Teilchens an. Die Teilchen werden durch das Potential abgebremst und die Teilchen mit $p = p_0$ kommen sogar zum Stillstand. Berechnen Sie die Position der Teilchen an den Ecken des Phasenraumbereichs zum Zeitpunkt $t = 2a\frac{m}{p_0}$ und skizzieren Sie das eingeschlossene Phasenraumvolumen. Beachten Sie dabei, dass Geraden nach der Stufe nicht zwangsläufig wieder auf Geraden abgebildet werden.
Ohne Punkte:
Zeigen Sie, dass das Volumen erhalten ist. Hinweis: Parametrisieren Sie dazu die Kante mit Startwert $x = -a$ über den Startimpuls $p_0 \leq p_i \leq 2p_0$ und berechnen Sie deren Graph $(x_t(p_i), p_t(p_i))$ zum Zeitpunkt $t = 2a\frac{m}{p_0}$. Das Volumen darunter können Sie durch Integration mittels $V = \int p_t \, \mathrm{d}x_t = \int p_t(p_i) \frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}p_i} \, \mathrm{d}p_i$ bestimmen.

c) Betrachten wir nun das Ensamble freier Teilchen in einer Box mit reflektierenden Wänden bei $x = \pm 2a$. Skizzieren Sie das eingeschlossene Phasenraumvolumen zu den Zeitpunkten, wo der Mittelpunkt der Fläche (mit Startpunkt $(0, \frac{3}{2}p_0)$) zum ersten, zweiten, vierten und achten Mal reflektiert wird. Wie sieht das eingeschlossene Phasenraumvolumen im Langzeitlimes $t \to \infty$ aus?