Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 12

http://www.thp.uni-koeln.de/∼jmueller/tp1-ws1617.html *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 27. Januar 2017, 12:00 Uhr*

1. Poisson-Klammern (Teil 1) (4 Punkte)

Die Poisson-Klammer aus zwei Funktionen $f = f(\vec{p}, \vec{q})$, $g = g(\vec{p}, \vec{q})$ wurde in der Vorlesung definiert als

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{1}$$

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Beispiele

$$\{q_1, p_1 q_1\}, \quad \{p_1 p_2, q_1^2\} \quad \text{und} \quad \{p_1, q_1^n\} \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

a) Wenden Sie die Definition der Poisson-Klammern auf die Beispiele an.

b) Nutzen Sie anstelle der Definition nun ausschließlich die Produktregel

$$\{f, g_1 g_2\} = g_1\{f, g_2\} + \{f, g_1\} g_2 \tag{3}$$

und die elementaren Poisson-Klammern

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{4}$$

um die Beispiele aufzulösen.

2. Poisson-Klammern (Teil 2) (3 Punkte)

Mit Hilfe des total antisymmetrischen Tensors

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k = 1,2,3 \text{ oder } 2,3,1 \text{ oder } 3,1,2 \text{ (gerade Permutation)} \\ -1 & \text{falls } i,j,k = 2,1,3 \text{ oder } 1,3,2 \text{ oder } 3,2,1 \text{ (ungerade Permutation)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

läßt sich der Drehimpuls definieren durch

$$L_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k \tag{6}$$

mit automatischer Summation über doppelt auftretende Indizes (hier j, k).

a) Beweisen Sie die Beziehung

$$\{L_i, K_j\} = -\epsilon_{ijk} K_k \tag{7}$$

für $K_i = q_i$ und $K_i = p_i$, indem Sie die Definition der Poisson-Klammern (1) nutzen.

b) Beweisen Sie nun die Beziehung

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k \tag{8}$$

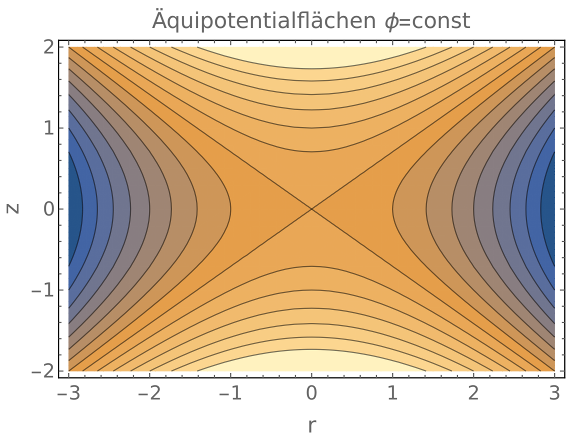
mit Hilfe der Produktregel (3) und dem Ergebnis aus Aufgabenteil (a).

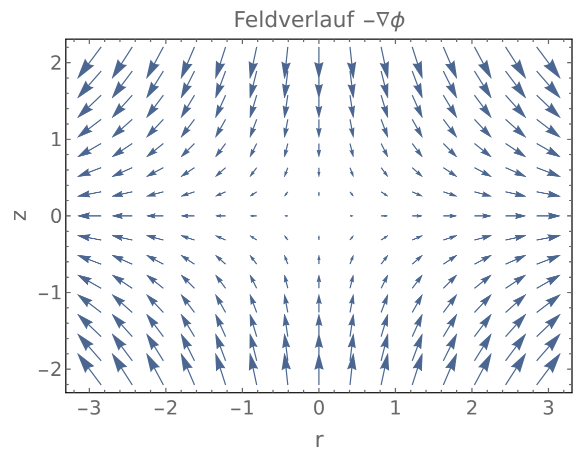
3. Penning-Falle (13 Punkte)

Das Einfangen und Festhalten von geladenen Teilchen im Vakuum hat vielerlei Anwendung. Mit statischen, elektrischen Feldern alleine können geladene Teilchen jedoch nicht gehalten werden. Dies wird erst möglich, wenn beispielsweise die statischen Felder durch zeitlich oszillierende Felder ersetzt werden (*Paul-Falle*).
Die *Penning-Falle* ist ein weiteres Modellsystem zur Speicherung von Ionen innerhalb eines begrenzten Raumbereichs[1], für dessen Entwicklung H. G. Dehmelt 1989 den Nobelpreis für Physik erhielt. Sie nutzt neben einem statischen, elektrischen Quadrupolfeld zusätzlich ein statisches Magnetfeld. Im Gegensatz zur Paul-Falle ist dieses Modell somit komplett statisch.
Wir betrachten folgend das elektromagnetische Feld definiert durch das Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$

$$\phi(x, y, z) = \frac{U_0}{2z_0^2 + r_0^2}(2z^2 - x^2 - y^2), \quad \vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Das Problem ist also rotationssymmetrisch um die z-Achse. Die Äquipotentialflächen[2] $2z^2 - r^2 = const$ (mit $r^2 = x^2 + y^2$) des elektrostatischen Potentials ϕ sind Rotationshyperboloide um die z-Achse. Die Skizzen zeigen das Potential ϕ und das Feld $-\nabla\phi$ in einem Schnitt durch die (r, z)-Ebene.





a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung eines punktförmigen Teilchens (Ladung q, Masse m) in diesem Feld auf und geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten (x, y, z) des Teilchens an. Sie können dafür die Ergebnisse aus Blatt 8, Aufgabe 4, nutzen.

b) Berechnen Sie die zu x, y, z kanonisch konjugierten Impulse p_x, p_y, p_z, stellen Sie die Hamiltonfunktion auf und gewinnen Sie nochmals die Bewegungsgleichungen.

---

[1] F.M.Penning, niederländischer Physiker. Review Artikel: *Single Particle Motion in a Penning Trap: Description in the Classical Canonical Formalism*, M. Kretzschmar, Physica Scripta, Vol. 46, 544-554, 1992

[2] Im experimentellen Setup sind die maximalen/minimalen Äquipotentialflächen zu identifizieren mit den Oberflächen der Kathoden/Anoden.

c) Wir nehmen $qU_0 > 0$ an (*warum?*). Zeigen Sie, dass mit

$$\omega_{0z}^2 = \frac{4qU_0}{m(2z_0^2 + r_0^2)}, \quad \omega_c = \frac{qB_0}{m} \tag{10}$$

die Bewegungsgleichungen die Form

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_{0z}^2 x &= 0 & (11) \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_{0z}^2 y &= 0 & (12) \\ \ddot{z} + \omega_{0z}^2 z &= 0 & (13) \end{aligned}$$

annehmen.

d) Führen Sie zur Lösung der Bewegungsgleichungen (11) und (12) die komplexe Variable $u = x + iy$ ein. Wie lautet die DGL für u? Begründen Sie, dass für

$$\omega_{01}^2 = \omega_c^2 - 2\omega_{0z}^2 > 0 \qquad \text{“trapping condition”} \tag{14}$$

die Bewegung gebunden ist, d.h. die Koordinaten (x, y, z) im Laufe der Zeitentwicklung (bei festen Anfangsbedingungen) endlich bleiben.

e) Zeigen Sie, dass mit folgender kanonischer Transformation von den kartesischen Koordinaten x, y, z und konjugierten Impulsen p_x, p_y, p_z zu

$$P_\pm = \frac{1}{c_1} p_x \pm \frac{c_1}{2} y, \quad Q_\pm = \frac{c_1}{2} x \mp \frac{1}{c_1} p_y, \quad P_3 = \frac{1}{c_z} p_z, \quad Q_3 = c_z z \tag{15}$$

die Hamiltonfunktion die folgende Form annimmt:

$$H(P_\pm, Q_\pm, P_3, Q_3) = \frac{\omega_+}{2}(P_+^2 + Q_+^2) - \frac{\omega_-}{2}(P_-^2 + Q_-^2) + \frac{\omega_{0z}}{2}(P_3^2 + Q_3^2) \tag{16}$$

mit $c_1 = \sqrt{m\omega_{01}}$, $c_z = \sqrt{m\omega_{0z}}$, $\omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \omega_{01})$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten entkoppelt sind. Wie lautet deren allgemeine Lösung?

f) Zeigen Sie, dass die erzeugende Funktion

$$\tilde{M}(x, y, z, Q_+, P_-, P_3) = \left(-c_1 Q_+ + \frac{c_1^2}{2} x\right) y + P_-(c_1 x - Q_+) + c_z z P_3 \tag{17}$$

mit

$$p_x = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial z}, \quad P_+ = -\frac{\partial \tilde{M}}{\partial Q_+}, \quad Q_- = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial P_-}, \quad Q_3 = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial P_3} \tag{18}$$

zu der in e) verwendeten Transformation führt. Zeigen Sie weiterhin, dass mit der Wahl dieser Erzeugenden die Transformation tatsächlich *kanonisch* ist.