Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 13

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 3. Februar 2017, 12:00 Uhr*

Dies ist das letzte Übungsblatt der Theoretischen Physik 1. Die Punkte von diesem Blatt sind ausschließlich Bonuspunkte, mit denen Sie ihren Punktestand aufbessern können.

1. Kanonische Transformation (Teil 1) (4 Punkte)

Für die kanonischen Variablen p, q des harmonischen Oszillators setzen wir eine komplexe Transformation an, mit welcher die Hamiltonfunktion bilinear in den neuen Variablen P, Q wird,

$$P = C(p - im\omega q), \qquad Q = C(p + im\omega q) \tag{1}$$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \frac{1}{2mC^2} PQ. \tag{2}$$

Für welchen Wert von C^2 ist diese Transformation kanonisch, also $\{P, Q\} = 1$? Wie lauten die kanonischen Gleichungen für P und Q? Gewinnen Sie (durch Berechnung von $P(t)$, $Q(t)$) die Lösung zur Anfangsbedingung $p = p_0$, $q = 0$ für $t = 0$.

2. Kanonische Transformation (Teil 2) (4 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Zeitentwicklung eine kanonische Transformation generiert. Wir betrachten als Beispiel dafür ein Teilchen der Masse m, welches auf eine Potentialstufe wie in Blatt 11, Aufgabe 3b, läuft:

$$V(x) = \Theta(x) \frac{p_s^2}{2m}, \tag{3}$$

wobei $\Theta(x)$ die Heaviside-Funktion darstellt, d.h. $\Theta(x < 0) = 0$ und $\Theta(x > 0) = 1$. Als Startbedingungen wählen wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinate $x_0 < 0$ und den Impuls $p_0 > p_s$. Nach der Zeit t_1 befinde sich das Teilchen am Ort $x_1 > 0$ mit Impuls $p_1 > 0$, d.h. $t_1 > \frac{-x_0 m}{p_0}$ (*warum?*).

a) Berechnen Sie $x_1(t_1)$, $p_1(t_1)$ als Funktion von x_0 und p_0.

b) Zeigen Sie durch Berechnung der Poissonklammern, dass die Abbildung $(x_0, p_0) \to (x_1, p_1)$ eine kanonische Transformation ist.

3. Erhaltungsgrößen und Integrabilität (4 Punkte)

Die Variablen p_x, x und p_y, y seien zwei unabhängige Paare kanonisch konjugierter Variablen, d.h. alle Poissonklammern aus je 2 der Variablen verschwinden mit Ausnahme von $\{p_x, x\} = \{p_y, y\} = 1$. Ein dynamisches System sei durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{1}{2}(1 + H_y)x^2 \quad \text{mit} \quad H_y = \frac{p_y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \tag{4}$$

definiert. Zeigen Sie durch Berechnung der Poissonklammer $\{H, H_y\}$, dass H_y eine Erhaltungsgröße ist. Ist H integrabel? Wenn ja, warum?
Hinweis: Jede Poissonklammer, die aus einer beliebigen Funktion von p_x und einer zweiten, beliebigen Funktion der kanonischen Variablen, die x nicht enthält, gebildet wird, verschwindet. Entsprechend gilt die Aussage bei Vertauschung von p_x und x. Ferner gilt die Produktregel $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$.

4. Gekoppelte Oszillatoren (4 Punkte)

Die Lagrangefunktion zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren ist ($m_{1,2} = 1$)

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 \tag{5}$$

mit Konstanten $\omega_{1,2}^2 > 0$ und $\kappa > 0$.

a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $x_{1,2}(t)$?

b) Berechnen Sie die Quadrate der Eigenfrequenzen des Systems. Im Grenzfall $\kappa \to \infty$ ist ein $\omega^2 \propto \kappa^1$, das andere $\omega^2 \propto \kappa^0 = 1$. Geben Sie die asymptotischen Werte $\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\omega^2}{\kappa}$ bzw. $\lim_{\kappa\to\infty} \omega^2$ explizit an.