Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 2

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 4. November 2016, 12:00 Uhr*

1. Erhaltungsgrößen des harmonischen Oszillators (5 Punkte)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator, d.h. ein Teilchen der Masse m, auf welches eine Rückstellkraft proportional zur Auslenkung vom Ruhepunkt wirkt. Dieses System wird also durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \tag{1}$$

beschrieben. Gehen Sie davon aus, dass die Bewegung auf die x-y-Ebene beschränkt ist. Verwenden Sie folgend $k = m\omega^2$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Größen zeitlich konstant, d.h. Erhaltungsgrößen sind:

$$l_z := x\dot{y} - \dot{x}y, \quad E_x := \dot{x}^2 + \omega^2 x^2, \quad E_y := \dot{y}^2 + \omega^2 y^2, \quad I := \dot{x}\dot{y} + \omega^2 xy. \tag{2}$$

Wie hängt l_z mit dem Drehimpuls L_z und $E_{x,y}$ mit der Energie E zusammen?

b) Zeigen Sie, dass $I^2 + \omega^2 l_z^2 = E_x E_y$, die Erhaltungsgrößen also nicht unabhängig voneinander sind.

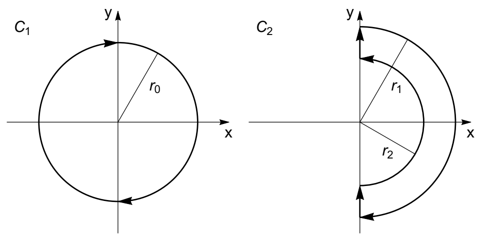
c) Leiten Sie aus den Erhaltungsgrößen eine Gleichung her, die Ihnen x und y in Relation setzt, d.h. nutzen Sie die Erhaltungsgrößen l_z, E_x und E_y um $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zu eliminieren.

d) (ohne Punkte) Überzeugen Sie sich, dass es sich bei den Bahnkurven um Ellipsen handelt.

2. Kraftfelder und Potentiale (5 Punkte)

Wir betrachten das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und die beiden Pfade C_1 und C_2, siehe Skizze.

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



a) Bestimmen Sie $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten. Für welche Funktionen $f(r)$ ist $\vec{F}(\vec{r})$ im Gebiet $\mathbb{R}^2 \backslash \{\vec{r}|r = 0\}$ wirbelfrei, d.h. $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$?

b) Betrachten Sie nun die beiden geschlossenen Pfade C_1 und C_2, siehe Skizze. Parametrisieren Sie die Pfade in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) mit $(x, y, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$. Sie können $z = 0$ annehmen. Berechnen Sie anschließend die Arbeit ΔA entlang dieser geschlossenen Wege für das wirbelfreie $\vec{F}(\vec{r})$ aus Aufgabenteil a.

c) (ohne Punkte) Für $r \to 0$ kann man $(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{c}{2}\delta(x^2 + y^2)$ schreiben. Berechnen Sie c aus dem Ergebnis von Aufgabenteil b.