Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 3

http://www.thp.uni-koeln.de/∼jmueller/tp1-ws1617.html *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 11. November 2016, 12:00 Uhr*

1. Zeitdilatation (7 Punkte)

Sebastian Vettel (29, Autofahrer) ist öfter mal schnell unterwegs. In den vergangenen 10 Jahren ist er insgesamt 176 Rennen gefahren und hat dabei pro Rennen (inklusive Vorbereitungsrunden) jeweils etwa 6 Stunden bei 300 km/h verbracht.

a) Wie viel Lebenszeit (in Nanosekunden) hat er dadurch gewonnen?

Noch schneller sind Piloten unterwegs und gehen bekanntlich ähnlich früh in den Ruhestand. Nehmen wir an, in seinem Arbeitsleben (30 Berufsjahre) fliege ein Pilot jährlich 100 Flüge mit 850 km/h von Düsseldorf nach Los Angeles (12 Stunden Flugzeit).

b) Wie viel früher geht der Pilot dadurch in Rente?

Nun zu wirklich großen Skalen: Unter Astrophysikern geht das Gerücht um, man habe einen erdähnlichen Planeten entdeckt: *Proxima b*. Er soll seine Bahnen um den uns nächsten Stern, *Proxima Centauri*, drehen. Die Bilder im Internet versprechen einen wunderschönen Sonnenaufgang, doch das offensichtliche Problem ist, dass dieses Sonnensystem etwa 4,24 Lichtjahre von uns entfernt liegt.

c) Wie schnell müssten Sie mit Ihrem Raumschiff fliegen, um durch die Zeitdilatation nur 10 Jahre zu altern? Wie viel Zeit ist dann auf der Erde vergangen? Vernachlässigen Sie die Zeit, die Sie zum Beschleunigen und Abbremsen bräuchten.

Das Bordkino bietet leider nur alle drei Teile einer bekannten Trilogie des letzten Jahrzehnts, die stolze 12 Stunden lang erzählt, wie ein Ring von einer Gruppe Männern (mit stark behaarten Füßen) zu einem Vulkan gebracht wird. Auf eine Reisedauer von 10 Jahren gesehen, ist das wenig abwechslungsreich. Sie beschließen noch schneller zu fliegen.

d) Wie schnell müssten Sie unterwegs sein, damit Sie bereits nach diesen 12 Stunden auf *Proxima b* ankommen? Wie lange dauerte der Flug aus Sicht der Erde?

e) Das Raumschiff der Aufgabenteile (c) und (d) wiegt 1000 Tonnen. Wie viel Energie braucht es jeweils, um mit den gewünschten Geschwindigkeiten unterwegs zu sein? Zum Vergleich: Die heute förderbaren Ressourcen an Erdöl haben einen Brennwert von etwa 10^{22}J. Reicht das für Ihr Vorhaben?

f) Angenommen, die verfügbare Menge an Energie sei unbegrenzt. Wie weit können Sie theoretisch innerhalb der 12 Stunden Flugzeit (aus Sicht des Raumschiffs) fliegen?

2. Längenkontraktion und Gleichzeitigkeit (7 Punkte)

Die Garage für Fahrräder in Ihrem Wohnheim ist zu kurz: Statt der 1,5m, die Ihr Fahrrad lang ist, misst die Garage lediglich eine Tiefe von 1,2m. Sie wollen die Längenkontraktion nutzen, um das Fahrrad doch noch in die Garage zu bekommen.

a) Gesagt, getan: Sie fahren mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}75c$ auf die offene Garage zu. Wie lang ist ihr Fahrrad im Ruhesystem der Garage? Wie schnell müssten Sie mindestens sein um hinein zu passen?

b) Sie bitten einen Freund, das Garagentor schnell zu schließen, sobald Ihr Hinterrad das Garagentor passiert hat. Überzeugen Sie sich, dass er das Tor schließen kann, bevor das Vorderrad an die Hinterwand der Garage stößt. Fertigen Sie dazu eine Skizze der (x, ct)-Ebene mit dem Verlauf von Anfangs- und Endpunkt der Garage und des Fahrrads an. Diese Linien in der (x, ct)-Ebene nennt man auch *Weltlinien*.

c) In Ihrem eigenen, bewegten Bezugssystem mit Koordinaten x' und t' sieht die Welt ganz anders aus: Hier bewegen nicht Sie sich, sondern die Garage. Wie lang sind Garage und Fahrrad in Ihrem Bezugssystem?

d) Im mitbewegten Koordinatensystem scheint das Fahrrad nicht mehr in die Garage zu passen. Doch keine Panik, dies ist ein Trugschluss. Um diesen aufzulösen, skizzieren Sie nun in der (x', ct')-Ebene (also im mitbewegten System) wieder die Weltlinen von Anfangs- und Endpunkt des Fahrads und die der Garage. Die Lösung dieses Paradoxons erhalten Sie, wenn Sie berücksichtigen, dass sich Information nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann: Wenn das Tor schließt, hat die Information, dass das Fahrrad an der Rückwand der Garage angekommen ist, noch nicht das Fahrradende erreicht hat. Überprüfen Sie dies graphisch. Tragen Sie dazu eine Linie in ihre Skizze ein, die angibt, wie sich ein Lichtstrahl ausbreitet, der ausgelöst wird, wenn der Anfang des Fahrrads auf die Rückwand prallt.

3. Lorentztransformationen (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für zwei Ereignisse mit zeitlichem und räumlichem Abstand Δt und Δx sich $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ unter Lorentztransformationen nicht ändert, also *lorentzinvariant* ist. Setzen sie hierfür konkret die transformierten Raum-Zeit-Koordinaten für einen Boost in x-Richtung mit Geschwindigkeit v ein.

b) Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) =: \partial_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu} \tag{1}$$

ein kovarianter 4er Vektor ist, d.h. dass er wie $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -\vec{x})$ transformiert. Hinweis: Nutzen Sie die Kettenregel für Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}^\mu} = \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tilde{x}^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\nu}$.

c) Warum ist also $\partial_\mu\partial^\mu = c^{-2}\partial_t^2 - \nabla^2$ lorentzinvariant?