Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 4

http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 18. November 2016, 12:00 Uhr*

1. Schwingungsdauer in eindimensionaler Bewegung (7 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie hergeleitet, dass die Schwingungsperiode τ einer gebundenen eindimensionalen Bewegung mit konstanter Energie E im Potential $V(x)$ über den Ausdruck:

$$\tau = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\, \mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

berechnet werden kann. Hierbei seien x_1, x_2 die beiden Umkehrpunkte und $E = V(x_1) = V(x_2)$. Das Potential sei gegeben durch $V(x) = k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$.

a) Führen Sie eine geeignete Substitution auf eine Variable u durch, so dass der Integrand von der (dimensionslosen) Form $1/(\sqrt{1 - |u|^\alpha})$ ist. Lesen Sie am entstandenen Ausdruck ab, für welche Werte von α die Schwingungsperiode *nicht* von der Gesamtenergie abhängt.

b) Betrachten Sie jetzt das repulsive Potential $V(x) = -k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$. Die Energie des Teilchens sei $E = 0$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $x = x_0 > 0$. Für welche Werte von α ist die Zeit, die das Teilchen zum Erreichen der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ braucht, endlich?

c) Wir betrachten konkret für $\alpha = \frac{3}{2}$ ein Teilchen mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$ im repulsiven Potential. Bestimmen Sie durch Einsetzen in die Newtonsche Bewegungsgleichung die Konstanten β und c so, dass $x(t) = ct^\beta$ die Gleichung löst. Warum ist auch $x(t) = 0$ für $0 \leq t \leq t_0$ und $x(t) = c(t - t_0)^\beta$ für $t > t_0$ eine (stückweise definierte) Lösung des Anfangswertproblems? Da t_0 unbestimmt ist, ist das Anfangswertproblem also nicht eindeutig lösbar. Warum widerspricht das nicht dem in der Vorlesung behandelten Eindeutigkeitssatz?

2. Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators (7 Punkte)

Die Green'sche Funktion $G(t)$ ist definiert als die Antwort des für $t > 0$ ruhenden Oszillators auf einen Kraftstoß bei $t = 0$, also formal die Lösung der inhomogenen DGL

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t) = \delta(t). \tag{2}$$

Der Kraftstoß bewirkt einen Sprung der Geschwindigkeit, dessen Größe sich durch Integration der DGL über ein kleines Zeitintervall um $t = 0$ ergibt: $\dot{G}(0^+) - \dot{G}(0^-) = \dot{G}(0^+) = 1$. Im Unterschied zur zeitlichen Ableitung ist G jedoch bei $t = 0$ stetig.

a) Somit ist $G(t)$ eine Lösung der *homogenen* Schwingungsgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t) = 0 \quad \text{mit} \quad G(0) = 0, \dot{G}(0) = 1 \tag{3}$$

als Anfangsbedingungen. Finden Sie diese Lösung mit Hilfe des Ansatzes $G(t) \propto e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Wie unterscheiden sich die Fälle $\omega_0^2 > \gamma^2$ und $\omega_0^2 < \gamma^2$, sowie der Grenzfall $\omega_0^2 = \gamma^2$?

b) Unter Verwendung der Green'schen Funktion lässt sich die Lösung $x(t)$ der Schwingungsgleichung für eine beliebige Inhomogenität $f(t)$ angeben:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')\mathrm{d}t' \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) x(t) = f(t). \tag{4}$$

Zeigen Sie dies. Die "Antwort" $x(t)$ des Oszillators zur Zeit t hängt demnach von der Kraft $f(t')$ zu allen früheren Zeiten $t' < t$ ab. Das Verschwinden der Green'schen Funktion für negatives Argument ist Ausdruck des Kausalitätsprinzips.

c) Berechnen Sie die Auslenkung $x(t)$ des für $t \leq 0$ ruhenden Oszillators im Fall $\omega_0^2 < \gamma^2$ aufgrund einer zeitlich linear anwachsenden Kraft $f(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$.

3. Virialsatz (5 Punkte)

Für Systeme von Massenpunkten, deren Bewegung auf ein endliches Raumgebiet (und endliche Geschwindigkeiten) beschränkt ist, folgen aus einer Homogenitätseigenschaft des Potentials nützliche Relationen für die Zeitmittelwerte von kinetischer und potentieller Energie.
Betrachten Sie im Folgenden die doppelte kinetische Energie

$$2T = \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = -\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{r}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i. \tag{5}$$

a) (ohne Punkte) Der zeitliche Mittelwert $\bar{X}$ ist definiert durch $\bar{X} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t)\mathrm{d}t$. Machen Sie sich klar, dass im zeitlichen Mittel der letzte Term auf der rechten Seite verschwindet.

b) Wir betrachten ein System, dessen potentielle Energie $U(\{\vec{r}_i\})$ homogen vom Grad k in den Koordinaten $\vec{r}_i$ ist, d.h.

$$U(\lambda\vec{r}_1, \lambda\vec{r}_2, ..., \lambda\vec{r}_n) = \lambda^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n). \tag{6}$$

Bilden Sie $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}\big|_{\lambda=1}$, um damit folgenden Zusammenhang zwischen der (konstanten) Gesamtenergie E und den Mittelwerten $\bar{T}$ der kinetischen und $\bar{U}$ der potentiellen Energie herzuleiten:

$$\bar{T} = \frac{k}{2}\bar{U} = \frac{k}{k+2}E, \quad \bar{U} = \frac{2}{k}\bar{T} = \frac{2}{k+2}E. \tag{7}$$

c) Benutzen Sie Gleichung (7) um zu beweisen, dass ein Planetensystem mit positiver Gesamtenergie $E > 0$ nicht stabil sein kann.