Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 5

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 25. November 2016, 12:00 Uhr*

1. Phasenraumportrait (7 Punkte)

Der Phasenraum einer eindimensionalen Bewegung ist die zweidimensionale Ebene, welche durch den Ort x und den Impuls p aufgespannt wird. Es können die Trajektorien von Teilchen (Masse m) mit Gesamtenergie E als Kurven in der (x, p)-Ebene eingezeichnet werden. Die Menge aller Trajektorien nennt man auch *Phasenraumportrait*. Dieses sollen Sie im Folgenden skizzieren, indem Sie für die beiden festen aber beliebigen Gesamtenergien E_1 und $E_2 = 2E_1$ die zugehörigen Kurven im Phasenraum zeichnen.

a) Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Zeichnen Sie das Phasenraumportrait. Welcher geometrischen Form entspricht dies? Wie groß ist der Flächeninhalt des Gebiets im Phasenraum, welches durch die Menge aller Zustände mit Gesamtenergie $E < E_0$ gegeben ist?

b) Betrachten Sie jetzt den eindimensionalen *an*harmonischen Oszillator $V(x) = \alpha x^4$. Geben Sie die Schnittpunkte der Trajektorien mit der x- und p-Achse an und skizzieren Sie das Phasenraumportrait.

c) Zeichnen Sie das Phasenraumportrait eines Teilchens im Schwerefeld $V(x) = mgx$. Was ist der Schnittpunkt mit der x-Achse?

d) Skizzieren Sie die Trajektorie eines Teilchens mit Energie E, das sich von einmal von links nach rechts (und einmal von rechts nach links) durch folgendes Potential bewegt:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{für } |x| > x_0 \end{cases} . \tag{1}$$

Zeichnen Sie jeweils die beiden Fälle $0 < E < V_0$ und $0 < V_0 < E$.

2. Periheldrehung (4 Punkte)

Der *Perihel*, der sonnennächste Punkt der Umlaufbahn eines Planeten um die Sonne, verschiebt sich bei allen Planeten mit jedem Umlauf minimal ($\sim 1°$ pro Jahrhundert). Dieser Effekt, die *Periheldrehung*, kann in der Newton'schen Mechanik durch Störungen des Gravitationspotentials beschrieben werden. Betrachten Sie folgendes Zweikörperproblem mit gravitativer Wechselwirkung α und Störung β:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}. \tag{2}$$

Berechnen Sie für gegebenen Drehimpuls L und Energie E – analog zur Vorlesung – die Funktion $r(\phi)$ und leiten Sie daraus die Periheldrehung $\Delta\phi$ für den Fall einer gebundenen Bewegung ab. Bemerkung: Einer der ersten großen Erfolge der allgemeinen Relativitätstheorie war es, die außergewöhnlich starke Periheldrehung des Merkur zu erklären.

3. Zwillinge im Weltraum (9 Punkte)

Die Zwillinge Alice und Beatrice sind aufgeregt: Beatrice darf an Bord des Raumschiffs *Voyager* steigen und die unbekannten Weiten des Weltraums erkunden. Beatrice fliegt mit der Geschwindigkeit v_1, $0 \ll \frac{v_1}{c} < 1$, los (der Warp-Antrieb ist leider defekt) und bewegt sich dann unbeschleunigt durch den Weltraum. Irgendwann kriegt sie Heimweh und beschließt, wieder mit der Geschwindigkeit $v_2 = -v_1$ zur Erde zurück zu kehren. Bei unserer Betrachtung können wir den Einfluss der Beschleunigung vernachlässigen, wenn die Flugzeit genügend lang ist (nehmen Sie dies als gegeben an). Nicht vernachlässigen können wir jedoch, dass Beatrice beschleunigt wird, es also kein Bezugssystem gibt, in dem sie die ganze Zeit in Ruhe ist.

a) Sei $(ct_1, v_1 t_1)$ die Raum-Zeit-Koordinate des Umkehrpunkts der Voyager und $(ct_2, 0)$ die des Treffpunkts der Zwillinge im unbewegten Bezugssystem von Alice. Was sind die Raum-Zeit-Koordinaten dieser Ereignisse in einem Bezugssystem, das sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit v (parallel zur Abflugrichtung) bewegt? Benutzen Sie das Ergebnis, um die Weltlinien (vgl. Blatt 3, Aufgabe 2) von Alice und Beatrice in den folgenden 3 Bezugssystemen zu skizzieren: (i) dem Ruhesystem von Alice: $v = 0$, (ii) dem Ruhesystem von Beatrices Hinflug: $v = v_1$, (iii) in einem weiteren Bezugssystem: $v = v_1/2$. Beschreiben sie in Worten, wie sich im Bezugssystem (ii) die Bewegung der beiden Zwillinge darstellt. Haben in Bezugssystem (iii) Alice und Beatrice nach dem Start die selbe absolute Geschwindigkeit?

b) Bei der Rückkehr ist Beatrice jünger als Alice. Den Altersunterschied können Sie über die Eigenzeit berechnen. Wenn man sich in einem Bezugssystem über den Zeitraum t mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist die Eigenzeit durch $\tau = t/\gamma$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ definiert. Überzeugen Sie Sich, dass τ unabhängig vom Bezugssystem ist, indem sie die Eigenzeiten von Alice und Beatrice in den Bezugssystemen (i) und (ii) berechnen.

c) Beatrice fliege mit $v_1 = 0.6c$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) und kehrt nach 5 Jahren (in Bordzeit) um. Um wie viele Jahre ist sie bei ihrer Ankunft auf der Erde gealtert? Wie viel ist Alice gealtert, die zu Hause geblieben ist?

Bemerkung: Das Problem wird oft als *Zwillingsparadoxon* bezeichnet, basierend auf dem (falschen) Argument, dass im Ruhesystem von Beatrice sich Alice schnell bewegt, also ihre Uhr langsamer gehen sollte. Der Fehler ist, dass es kein Ruhesystem gibt, in dem Beatrice die ganze Zeit in Ruhe ist, wie die Weltliniendiagramme veranschaulichen.