Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 6

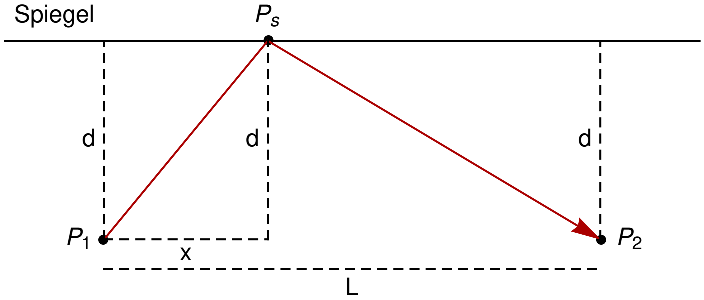
http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 2. Dezember 2016, 12:00 Uhr*

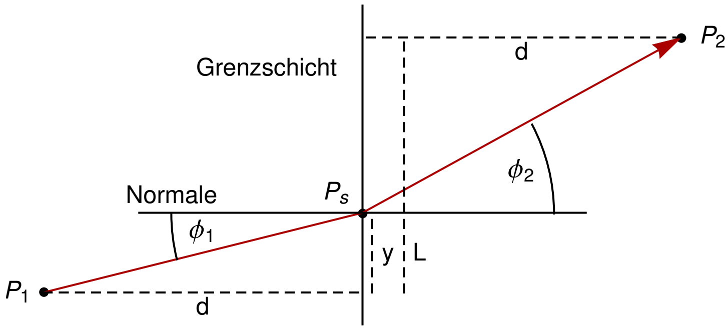
1. Geometrische Optik (5 Punkte)

Die geometrische Optik folgt aus dem *Fermatschen Prinzip*: Lichtstrahlen breiten sich so aus, dass die Laufzeit *extremal* wird. Ist die Lichtgeschwindigkeit räumlich konstant, dann folgt aus dem Fermatschen Prinzip, dass sich Licht geradlinig ausbreitet, also zwei Punkte immer über den kürzesten (räumlichen) Weg verbindet.

a) Siehe Skizze: Betrachten Sie zwei Punkte $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (L, 0)$ in der zweidimensionalen x-y-Ebene mit Abstand L. Ohne Rechnung: Welchen Weg nimmt das Licht von einen Punkt zum anderen? Ein (unendlich langer) Spiegel S werde parallel zur x-Achse mit $y_s = d$ angebracht. Lichtstrahlen, welche die beiden Punkte verbinden und auf ihrem Weg am Spiegel reflektiert werden, treffen den Spiegel am Punkt $P_s = (x, d)$. Bestimmen Sie x aus dem Fermatschen Prinzip. Was folgt für den Zusammenhang von Einfalls- zu Ausfallswinkel für die Reflexion des Lichtstrahls am Spiegel? Begründen Sie, warum der Weg $P_1 - P_s - P_2$ zwar extremal, aber weder minimal noch maximal ist.



b) Siehe Skizze: Betrachten Sie zwei Punkte $P_1 = (-d, 0)$ und $P_2 = (d, L)$ in der zweidimensionalen x-y-Ebene. Die beiden Punkte befinden sich in Medien mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten $c_1 = \frac{c}{n_1}$ für $x < 0$ und $c_2 = \frac{c}{n_2}$ für $x > 0$, die durch eine lichtdurchlässige Grenzschicht bei $x = 0$ getrennt sind. Der Lichtstrahl, der die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet, durchstößt die Grenzschicht im Punkt $P_s = (0, y)$. Leiten Sie aus dem Fermatschen Prinzip das Snelliussche Brechungsgesetz her: $n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2$.



2. Halfpipe (3 Punkte)

Betrachten Sie eine Halfpipe, deren Querschnittsprofil mit $z(x) = \frac{k}{2}x^2$ gegeben ist. Sie stehen am Rand bei $x = x_0$, das Skateboard (als Massepunkt der Masse m) liegt auf der Halfpipe und rollt plötzlich reibungsfrei durch den Einfluss des Gravitationspotentials $V_G(z) = mgz$ die Halfpipe hinunter.

a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingung $f(x,z) = 0$, die durch die Halfpipe verursacht wird.

b) Nutzen Sie die Zwangsbedingung, um die Newtonschen Bewegungsgleichungen des Skateboards um eine Zwangskraft der Stärke λ zu ergänzen.

c) Eliminieren Sie λ und leiten Sie eine (von z unabhängige) Differentialgleichung für $x(t)$ her.

3. Pendel mit zeitabhängiger Länge (5 Punkte)

Betrachten Sie das mathematische Pendel, also einen Massepunkt (Masse m), der an einem starren Faden der Länge l aufgehängt ist und auf den die Schwerkraft $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$ wirkt. Nehmen Sie an, die Länge des Fadens sei – im Gegensatz zur Vorlesung – zeitabhängig, $l = l(t)$.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung $f(x,z) = 0$, bestimmen Sie die Zwangskraft, eliminieren Sie die Unbekannte λ und leiten Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen her.

b) Führen Sie die Parametrisierung $\vec{r}(r,\phi) = r\,(\sin\phi, 0, -\cos\phi)$ ein und wählen Sie den geeigneten Ansatz für $r = r(t) = l(t)$. Zeigen Sie: Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich somit auf

$$\ddot{\phi}(t) = -2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\phi}(t) - \frac{g}{l(t)}\sin\phi(t) \tag{1}$$

4. Doppelpendel und Hantel (7 Punkte)

a) Betrachten Sie das Doppelpendel, d.h. ein Pendel (Masse m_1, Fadenlänge l_1), an dessen Massepunkt ein weiteres Pendel (Masse m_2, Fadenlänge l_2) befestigt ist. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen im dreidimensionalen Raum und ergänzen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen um die resultierenden Zwangskräfte (Vorfaktoren λ_i brauchen nicht eliminiert werden). Wie viele Freiheitsgrade bleiben für das Doppelpendel durch die Zwangsbedingungen noch übrig, d.h. welche Dimension hat die Lösungsmannigfaltigkeit? Wie viele sind es, wenn wir das Problem im zweidimensionalen Raum betrachten?

b) Eine Hantel bestehe aus zwei Massepunkten (jeweils Masse m), die durch eine starre (masselose) Verbindung auf konstantem Abstand l gehalten werden. Die beiden Massepunkte sollen in ihrer Bewegung nun auf je einen von zwei konzentrischen Kreisen in der x-y-Ebene (Radien r_1 und r_2) beschränkt werden. Wie lauten die Zwangsbedingungen und die daraus resultierenden Newtonschen Bewegungsgleichungen (Vorfaktoren λ_i brauchen nicht eliminiert werden)? Welche Dimension hat die Lösungsmannigfaltigkeit? Wie ändert sich diese im Fall von zwei konzentrischen Sphären statt Kreisen im dreidimensionalen Raum?