Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 7

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 9. Dezember 2016, 12:00 Uhr*

Information der Fachschaft Physik:
*In der Woche vom 12.-16.12. wird wieder an der Uni gewählt. Angesichts dessen veranstaltet die Fachschaft am Donnerstag, 08.12. 12 Uhr, Hörsaal III, eine Vollversammlung. Dort erfahrt ihr alles über die Wahlen: Was wird gewählt? Wer steht zur Wahl? Warum ist das wichtig? Außerdem werden die studentischen Vertreter*innen einiger physikinterner Gremien vor Ort auf der Vollversammlung gewählt.*

1. Telefon mit Schnur (6 Punkte)

Romeo und Julia sind ein Liebespaar mit einem Problem: Die Eltern der beiden verbieten, dass sie sich treffen. Glücklicherweise sind sie jedoch Nachbarn und können sich von Balkon zu Balkon verliebte Blicke zuwerfen.
Um geheime Nachrichten auszutauschen, spannen Romeo und Julia ein Seil zwischen den Balkonen und befestigen Becher an den Enden. Die Balkone werden von einer Gasse der Breite L getrennt. Das Seil (Länge L') ist jedoch länger als die Gasse breit ist ($L' > L$) und hängt daher, beeinflusst durch das Schwerefeld der Erde, etwas durch. Sei $z(x)$ die Höhe des Seils and der Position x zwischen den Balkonen, wobei das eine Ende $x_R = -L/2$ auf Romeos Balkon und das andere Ende $x_J = L/2$ auf Julias Balkon befestigt ist. Sie können für Ihre folgenden Rechnungen annehmen, dass die Gasse zwischen den Balkonen unendlich tief ist und sich die Balkone auf gleicher Höhe $z(x_R) = z(x_J) = 0$ befinden.

a) Zeigen Sie, dass die potentielle Energie eines Seils im Schwerefeld gegeben ist als

$$E = \mu g \int_{x_R}^{x_J} \mathrm{d}x \, z\sqrt{1+z'^2}. \tag{1}$$

Ersetzen Sie dafür im sonst üblichen Ausdruck $E = mgz$ die Masse durch ein Integral über die Massenstückchen $\mathrm{d}m = \mu \, \mathrm{d}s$. Dabei ist μ die Masse pro Seillänge $\mathrm{d}s$. Drücken Sie $\mathrm{d}s$ über $\mathrm{d}x$ aus.

b) Setzen Sie den Ausdruck für die potentielle Energie in die Euler-Lagrange-Gleichung ein und leiten Sie eine Differentialgleichung für den Seilverlauf $z(x)$ her. Zeigen Sie anschließend, dass

$$z(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{b}\right) \tag{2}$$

für eine bestimmte Wahl von a/b eine Lösung der gefundenen Gleichung ist.

c) Das ursprüngliche Problem war translationsinvariant in z-Richtung. Um dies wieder herzustellen, addieren Sie einen Offset z_0 zu der Lösung aus Gleichung 2. Eliminieren Sie die Konstanten x_0 und z_0 mit Hilfe der Randbedingungen. Leiten Sie außerdem einen Zusammenhang zwischen Krümmungsradius a und Seillänge L' her.

2. Gebogener Balken (10 Punkte)

Das frustrierte Liebespaar Romeo und Julia haben Sie ja in der ersten Aufgabe kennengelernt. Die beiden haben sich zum plaudern verabredet, doch Romeo erscheint nicht auf seinem Balkon. Julia nimmt also einen langen Stock und will damit über die Gasse hinweg an Romeos Fenster klopfen.
Der Stock sei beschrieben durch die Funktion $z(x,t)$ mit zugehöriger Lagrangedichte $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{z}^2 - \frac{\kappa}{2}z''^2 + z\, f(x,t). \tag{3}$$

Die Funktion $f(x,t)$ sei vorgegeben.

a) (ohne Punkte) Was ist die physikalische Interpretation der einzelnen Summanden in $\mathcal{L}$?

b) In der Vorlesung wurde die Funktionalableitung nur für Funktionale mit Ableitungen erster Ordnung hergeleitet. Hier tritt jedoch ein Term mit zweifacher Ableitung (z'') auf. Betrachten Sie eine Variation $z \to z + \delta z$ und zeigen Sie, dass die Variation der Wirkung $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{x_R}^{x_J} \mathrm{d}x\ \delta\mathcal{L}$ geschrieben werden kann als

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{x_R}^{x_J} \mathrm{d}x\ \left(-\mu\ddot{z} - \kappa z'''' + f\right)\delta z + \int_{x_R}^{x_J} \mathrm{d}x\ \ \mu\dot{z}\delta z\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \ \kappa\left(z'''\delta z - z''\delta z'\right)\big|_{x_R}^{x_J} \tag{4}$$

c) Wie lautet die Differentialgleichung, welche den Stock $z(x,t)$ beschreibt? Welche Randbedingungen ergeben sich?
Betrachten Sie anschließend den stationären Fall im Schwerefeld ($f = -\mu g$, $z = z(x)$). Was ist die physikalische Interpretation von $\delta S = 0$? Wie lautet die DGL zur Bestimmung von $z(x)$?

d) Julia hält den Stock nun in vollkommener Ruhe, sodass er Romeos Balkon berührt, d.h. der Stock erfüllt $z(x_R) = z(x_J) = 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung und skizzieren Sie die Lösung. Drücken Sie die Entfernung x in Einheiten der Gesamtentfernung L aus, d.h. $x = L\bar{x}$. Wie skaliert die maximale Höhe mit L?

3. Noch ein Pendel (4 Punkte)

Romeo (bekannt aus den vorhergehenden Aufgaben) hat eine Idee, wie er Julia (Masse m) heimlich auf seinen Balkon bekommt: Das Haus verfügt über einen Seilzug, dessen Umlenkrolle sich in einer Höhe von $z = \frac{3}{4}L$ über Romeos Balkon ($z = 0$) bei $x = x_R = -L/2$ befindet. Die Umlenkrolle sei vernachlässigbar klein. Romeo wirft ein Ende eines masselosen Seils um die Umlenkrolle rüber zu Julia, $(x_J, z_J) = (L/2, 0)$, und hält das andere Ende fest. Nun kann sie sich festhalten und einfach zu ihm rüberschwingen!

a) Nehmen wir an, Romeo halte das Seil nur fest (d.h. nehmen Sie eine konstante Seillänge für Julia an). Parametrisieren Sie Julias Flugbahn in Zylinderkoordinaten (r, ϕ). Tipp: Sie können den Koordinatenurspung in die Umlenkrolle verschieben. Wie lautet die Lagrangefunktion $L = T - V$ in diesen Koordinaten? Leiten Sie über die Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung her. Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen Julia und Romeos Balkon, wenn Sie bei $x = x_R$ ankommt?

b) Romeo will nun so an dem Seil ziehen, dass Julia nach minimaler Zeit auf seinem Balkon landet. Erweitern Sie die Parametrisierung aus Teil (a) um diesen Aspekt und stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Leiten Sie anschließend über Euler-Lagrange die Bewegungsgleichung her und vergleich Sie mit der Lösung aus Blatt 6, Aufgabe 3b.