Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

TP I (Mechanik) — Blatt 8

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Freitag, 16. Dezember 2016, 12:00 Uhr*

Information der Fachschaft Physik:
*In der Woche vom 12.-16.12. wird wieder an der Uni gewählt. Angesichts dessen veranstaltet die Fachschaft am Donnerstag, 08.12. 12 Uhr, Hörsaal III, eine Vollversammlung. Dort erfahrt ihr alles über die Wahlen: Was wird gewählt? Wer steht zur Wahl? Warum ist das wichtig? Außerdem werden die studentischen Vertreter*innen einiger physikinterner Gremien vor Ort auf der Vollversammlung gewählt.*

1. Brachistochrone (4 Punkte)

Das Brachistochronenproblem ist das wohl bekannteste Problem in der Variationsrechnung und geht auf die beiden Bernoulli-Brüder zurück. 1696 formulierte es *Johann Bernoulli* wie folgt: Zwei Punkte $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$, die verschieden hoch, aber nicht direkt übereinander liegen, sollen durch eine Rutschbahn verbunden werden, sodass ein reibungsfreier Schlitten in möglichst kurzer Zeit von A nach B gleitet. Sie dürfen der Jahreszeit entsprechend auch eine Rodelbahn annehmen.

a) Sie starten mit Ihrem Schlitten an Punkt A mit Startgeschwindigkeit $v = 0$. Die Bahn sei reibungsfrei und Sie werden vom Schwerefeld beschleunigt. Leiten Sie aus der Energieerhaltung einen Ausdruck für die Geschwindigkeit (als Funktion des Ortes x) her.

b) Nutzen Sie die Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{dl}{dt}$, also das überfahrene Bahnstück dl pro Zeit dt, und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die gesamte Fahrtzeit $T = \int F(y, y', x)\mathrm{d}x$ her. Bestimmen Sie $F(y, y', x)$.

c) Nutzen Sie das Ergebnis aus (b) um daraus mittels Euler-Lagrange eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $y(x)$ herzuleiten.

Während Johann Bernoulli für die Lösung die Variationsrechnung erfand, löste sein Bruder Jacob das Problem quasi ohne Differentialrechnung mittels Snellius'schem Brechungsgesetz im Medium mit veränderlichem Brechungsindex.

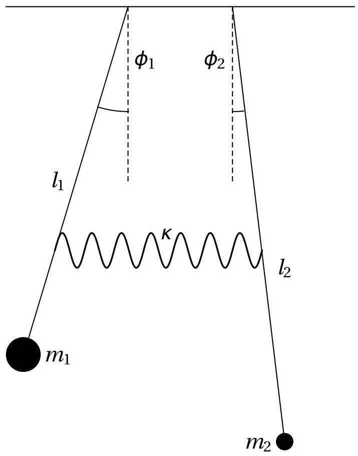
2. Gekoppelte Pendel (8 Punkte)

Betrachten Sie die Schwingungen zweier harmonischer Pendel (Massen $m_{1,2}$ an masselosen Stangen der Längen $l_{1,2}$ mit Ausschlagwinkel $\phi_{1,2} \ll 1$, vlg. Skizze), die über eine Feder mit Kopplungsenergie $U = \frac{\kappa}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2$ verbunden sind.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = L[\phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2]$ für kleine Auslenkungen $\phi_{1,2} \ll 1$ auf.

b) Welche Bewegungsgleichungen ergeben sich daraus?

c) Verwenden Sie den üblichen Schwingungsansatz $\phi_{1,2} = c_{1,2}e^{i\omega t}$. Damit erhalten Sie ein lineares Gleichungssystem für die Amplituden $c_{1,2}$, welches nur für zwei bestimmte Frequenzen $\omega_{1,2}$ (sogenannte *Eigenfrequenzen*) nichttrivial lösbar ist. Berechnen Sie diese Eigenfrequenzen und skizzieren Sie deren Quadrate in Abhängigkeit der Kopplung κ.



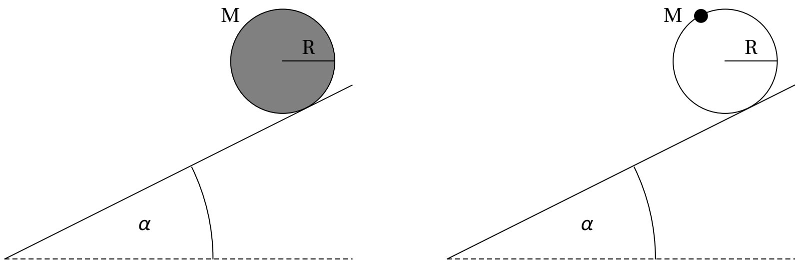
d) Nehmen Sie nun an, dass das Scharnier von Pendel Nummer 1 mal wieder geölt werden müsste: Die Reibung sei hier nicht mehr vernachlässigbar. Leiten Sie die Bewegungsgleichung unter Anwesenheit von Reibung für ϕ_1 her.

Wenn Sie die Pendel nun durch wackelnde Weihnachtsmänner ersetzen, haben Sie übrigens zu guter Näherung eines der Experimente aus der Weihnachtsvorlesung der Physik analysiert.

3. Drehwurm (6 Punkte)

Über den antiken griechischen Philosophen *Diogenes von Sinope* sollten Sie zwei Anekdoten wissen: Als *Alexander der Große* ihn einst besuchen kam, war die Reaktion des Diogenes wenig herzlich ("Geh mir ein wenig aus der Sonne" soll er gesagt haben). Außerdem lebte er in einer Tonne. Letzteres soll nun Aufhänger für die folgende Aufgabe sein.

Wir betrachten folgendes Szenario: Diogenes (Masse M) hat sich in seine Tonne (Radius R) gelegt, die er auf einer abschüssigen Straße (Neigungswinkel α) platziert hat. Die Tonne liegt auf der Mantelfläche und so orientiert, dass man darin nichts von der Neigung merkt. Wir betrachten also ein effektiv zweidimensionales System, welches durch die Zwangsbedingung des Straßenkontakts durch einen einzigen Parameter beschrieben werden kann. Weiterhin wollen wir annehmen, dass das System reibungs- und schlupffrei ist. Leider ist über des Größenverhältnis zwischen Diogenes und seiner Tonne nichts bekannt. Wir betrachten daher die beiden Extremfälle.



a) Nehmen wir an, Diogenes fülle seine Tonne komplett und homogen mit seiner Masse aus (erste Skizze). Parametrisieren Sie die Position des Tonnenmittelpunkts über den abgerollten Winkel $\phi(t)$, also den Winkel, um den sich die Tonne um die eigene Achse gedreht hat. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ her.
Tipp: Bedenken Sie, dass die Massenteile dm der Tonne sich unterschiedlich schnell bewegen, abhängig davon, wie weit sie vom Zentrum der Tonne entfernt sind. Schreiben Sie die kinetische Energie T also als Integral über diese Massenteile, $T = \int \dot{\vec{r}}^2 \frac{\mathrm{d}m}{2}$.

b) Im anderen Extremfall sei Diogenes sehr viel kleiner als seine Tonne. Wir nähern ihn also als Massenpunkt an, der am Rand der Tonne fixiert ist (zweite Skizze). Nutzen Sie wieder den abgerollten Winkel aus Teil (a) um damit nun die Position des Diogenes zu parametrisieren. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ her. Kann Diogenes trotz eines endlichen Neigungswinkels $\alpha > 0$ liegen bleiben, ohne die Straße hinab zu rollen? Gibt es einen kritischen Winkel α_c, ab dem er immer ins Rollen kommt? Wenn ja, bestimmen Sie ihn.

4. Geladenes Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern (3 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (Ladung e und Masse m) ist gegeben als

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r},t) + e\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}} \tag{1}$$

mit skalarem Potential $\phi(\vec{r},t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$. Diese Potentiale sind über die Relationen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{2}$$

mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem Magnetfeld $\vec{B}$ verknüpft.

a) Zeigen Sie zunächst folgenden Zusammenhang:

$$\left(\dot{\vec{r}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right)_i = \sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) \tag{3}$$

b) Nutzen Sie nun die Euler-Lagrange-Gleichungen, um zu zeigen, dass aus der Lagrangefunktion L die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}(\vec{r},t) + e\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right) \tag{4}$$

folgt.