Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. A. Rosch
J. Müller

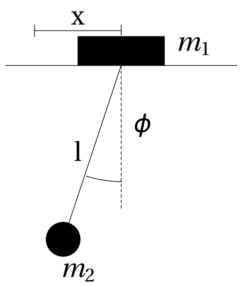
TP I (Mechanik) — Blatt 9

`http://www.thp.uni-koeln.de/~jmueller/tp1-ws1617.html` *Winter 2016/2017*

Abgabe: *Montag, 9. Januar 2017, 10:00 Uhr*

Bitte beachten: Am Freitag, 23.12., sind bereits Weihnachtsferien. Sie erhalten daher die Möglichkeit, ihre Abgaben erst am Montag nach den Ferien einzuwerfen. Bitte beachten Sie dazu die vorgezogene Uhrzeit. Die nachfolgenden Übungen werden dann, wie üblich, wieder Freitags abgegeben.

1. Pendel mit horizontal beweglicher Aufhängung (7 Punkte)



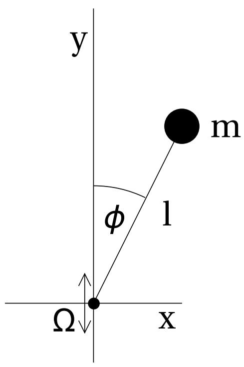
Wir betrachten ein Pendel (Fadenlänge l, Masse m_2), dessen Aufhängepunkt auf einer horizontalen Schiene reibungsfrei beweglich ist und mit einer Masse m_1 behaftet ist (siehe Skizze). Beide Massen werden als punktförmig angesehen.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Nutzen Sie dazu die verallgemeinerten Koordinaten x und ϕ aus der Skizze. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$.

b) Die Koordinate x tritt in der Lagrangefunktion nicht explizit auf. Zeigen Sie, dass deswegen die Horizontalkomponente des Gesamtimpulses zeitlich konstant ist.

c) Zeigen Sie, dass neben dem Horizontalimpuls (siehe Teil b) auch die Gesamtenergie E eine Erhaltungsgröße ist. Wie lautet die Gesamtenergie in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$? Leiten Sie daraus eine Integralgleichung zur Bestimmung der Schwingungsdauer τ her. Sie brauchen das Integral nicht zu lösen.

2. Das Kapitza-Pendel (2 Punkte)



Wir betrachten wieder das ebene mathematische Pendel (Masse m an masseloser Stange der Länge l) im Schwerefeld (Beschleunigung g). Der Aufhängepunkt führe, angetrieben durch eine äußere Kraft, eine schnell oszillierende Bewegung (Amplitude a und Frequenz Ω) in vertikaler Richtung aus. Die Koordinaten der Masse m sind damit (vergleiche Skizze)

$$\begin{aligned} x &= l \sin\phi \\ y &= l\cos\phi + a\cos\Omega t \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\Omega \gg \omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$.
Tipp: Suchen Sie zur Motivation mal auf der Videoplattform Ihrer Wahl nach "Kapitza Pendulum".

a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion (bis auf eine vollständige Zeitableitung, welche die Bewegungsgleichung nicht ändert) folgendermaßen lautet:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mal\Omega^2 \cos(\Omega t) \cos\phi - mgl\cos\phi \tag{2}$$

und zur Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \left(-\omega^2 + \frac{a}{l}\Omega^2 \cos(\Omega t)\right) \sin\phi = 0 \tag{3}$$

führt.

b) (ohne Punkte) Die Oszillation des Aufhängepunkts erzeugt eine Schwingung des Pendels um einen neuen stabilen Fixpunkt nahe $\phi = 0$, also "oben". Sollten Sie bislang noch kein Video zum "Kapitza Pendulum" gefunden haben, schauen Sie jetzt vielleicht nochmal nach.
Diese Beobachtung können wir durch eine störungstheoretische Betrachtung des Problems verstehen: Ist das Verhältnis von Stablänge l zu Oszillationsamplitude a klein, $\epsilon = a/l \ll 1$, so gilt für die angenommenen schnellen Oszillationen $\Omega \gg \omega$ dennoch $\epsilon\Omega^2 \gg \omega^2$, d.h. der treibende Term $\frac{a}{l}\Omega^2 \cos(\Omega t)$ der Bewegungsgleichung ist dominant. Eliminieren Sie diesen Term durch den Ansatz

$$\phi(t) = \varphi(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \sin(\varphi(t)). \tag{4}$$

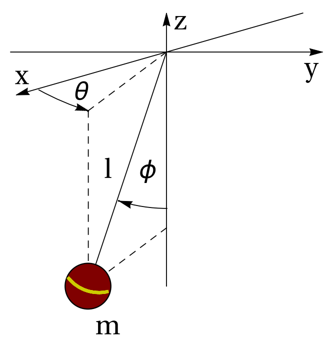
Nähern Sie anschließend $\sin\phi$ bis zu linearer Ordnung in ϵ und vernachlässigen Sie danach die oszillierenden Terme. Sie sollten dann eine DGL der Form

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi + \frac{\epsilon^2\Omega^2}{2} \sin(2\varphi) \tag{5}$$

erhalten. Zeichnen Sie das "Potential" auf der rechten Seite für verschiedene Werte $\frac{\epsilon^2\Omega^2}{\omega^2}$ und machen Sie sich klar, dass durch die zusätzliche Modulation neue Minima entstehen. Hinweis: $\cos(\omega t)^2 = (1 + \cos(2\omega t))/2$ hat als nicht-oszillierenden Anteil den Faktor 1/2.

3. Früher war mehr Lametta (8 Punkte)

Eine Christbaumkugel (punktförmige Masse m an Faden der Länge l) hänge am Baum, siehe Skizze. Im Gegensatz zu sonst wollen wir nun den dreidimensionalen Fall betrachten.



a) Parametrisieren Sie die Koordinaten des Massenpunkts in Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(\theta, \phi) = l \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} \tag{6}$$

und drücken Sie die Lagrangefunktion in diesen aus. Leiten Sie anschließend die Bewegungsgleichung her.

b) Welcher Koordinatentransformation entspricht die Rotationssymmetrie um den Aufhängepunkt? Bestimmen Sie die beiden Erhaltungssätze des Systems.

c) Der Aufhängepunkt $\vec{r}_0$ befinde sich im Abstand R vom Stamm des Christbaums. Der Baum drehe sich nun kontinuierlich um die eigene Achse (die genau dem Stamm entspricht). Die Position des Aufhängepunktes ist also beschrieben durch

$$\vec{r}_0(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Zeittranslation und Rotationssymmetrie sind nun beide gebrochen (*warum?*). Dafür gibt es jetzt eine Symmetrie, die aus deren beider Kombination entsteht und die wir im Folgenden bestimmen wollen.
Stellen Sie die Lagrangefunktion L auf und zeigen Sie, dass unter Verwendung der trigonometrischen Additionstheoreme θ nur in der Kombination $\theta - \Omega t$ auftaucht. Welche Transformation $(\theta, t) \to (\theta', t')$ lässt also L invariant? Benutzen Sie das verallgemeinerte Noether-Theorem um den entsprechenden Erhaltungssatz zu finden.