Vorkurs Teil 2 – Analysis

Joachim Herrberger
II. Phys., 1.222
Tel. 470-3770
hemberger@ph2.uni-koeln.de

Notizzettel 17.09.2007

→ griechisch: "Auflösung"

in English: "Calculus" (von Gl. ?)

Protagonisten: – Gottfried Wilhelm Leibniz
– Isaac Newton (→ Physiker!)

Bisher: linear & mehrdim. | Jetzt: nicht-linear 1. dim | später:
Lin. Algebra | Analysis | Vektor-analysis

Folgen & Reihen – Funktion – Differenzieren – Taylorentwicklung

- Folgen & Reihen: Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz
- Funktion: Stetigkeit, Umkehrfkt., Elementare Funktionen
- Differenzieren: Regeln, Höhere Ableitungen, Kurvendiskussion, Grenzwerte
- Taylorentwicklung: linearen, quadratische, ..., Potenzreihendarstellung

Komplexe Zahlen – Integrieren – DGLs

- Komplexe Zahlen: Polar Darstellung, Komplexe Wurzeln
- Integrieren: Regeln, Stammfkt., (Uneigentliche Integrale)
- DGLs: lineare, harmonisch (anharmonisch)

Motivation: • Begriffe und Gesetze der Grenzprozesse
(Folgen) • Diskreter "Vorläufer" der Fkt. ($n \to x$, $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

(Eindeutige) Zuordnungen von Werten (Zahlen aus $\mathbb{R}$) zu Zahlen aus $\mathbb{N}$
Abbildung auf $\mathbb{N}$ → "durchnummerierte Werte"

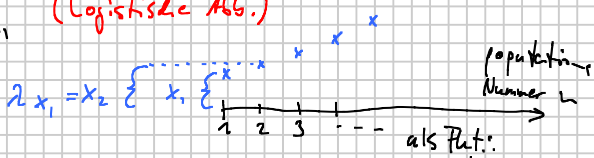
Bsp: Population x wächst mit jeder Generation n um Faktor $\lambda > 0$.

$$\longrightarrow x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \quad , n = 1, 2, 3, \ldots \quad \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

$x_1 :=$ Startwert — rekursiv definiert

oder: explizit (Logistische Abb.)

$$\longrightarrow x_n = x_1 \lambda^{n-1}$$



F1 x $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ Die natürlichen Zahlen selbst

F2 o $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ einfache alternierende Folge

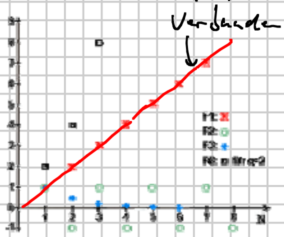
F3 + $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ inversen nat. Zahlen, harmonische Folge

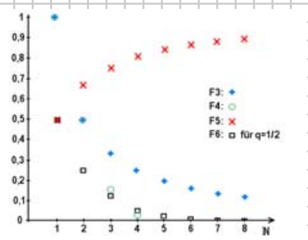
F4 o $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots = (\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ inverse Fakultäten

F5 x $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ einfache rationale Folge

F6 □ $q, q^2, q^3, q^4, q^5 \ldots = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ geometrische Folge

als Fkt.: Verbinde





F1 × $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ Die natürlichen Zahlen selbst

F2 o $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots = ((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ einfache alternierende Folge

F3 + $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$

inversen nat. Zahlen, harmonische Folge

F4 o $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots = (\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$

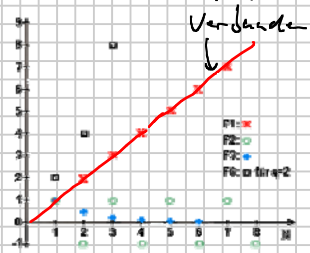
inverse Fakultäten

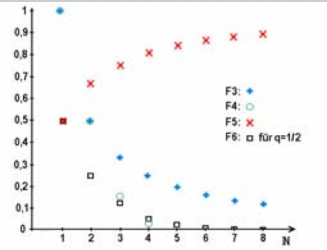
F5 × $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ einfache rationale Folge

F6 □ $q, q^2, q^3, q^4, q^5 \ldots = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

gemometrische Folge

als Fkt.: Verbunden



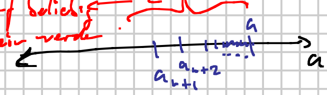


„Satz von Bolzano-Weierstraß": Jede nach $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{oben}}{\text{unten}}$ beschränkte monoton $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{steigende}}{\text{fallende}}$ Folge ist konverg.

oder: (eigentlich: Jede oben & unten beschr. Folge hat mind. 1 H.P.)

Cauchy-Kriterium: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \underbrace{|a_n - a_m| < \varepsilon}_{\text{„}\varepsilon\text{-Umgebung"}}\ \forall\, n, m > N(\varepsilon)$

darf beliebig klein werden



Die Abstände zwischen den Folgegliedern müssen ab einer bestimmten Nummer immer kleiner werden, dann konvergiert die Folge!
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Bem.: Grenzwerte sind Häufungspunkte
→ In jeder ε-Umgebung liegen ∞-viele Folgeglieder

Bem.: Ist der Grenzwert $a = 0$
→ „Nullfolge"

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (a_n - a)$ ist Nullfolge

Bsp.: Folg F3 : $a_n = \frac{1}{n}$ (harmonisch Folge)

(1) „Bolz.-Weier.": monoton ✓ beschränkt: $0 < \frac{1}{n}$ ✓ konvergent

(2) Häufungspunkt $a = 0$: Wir geben $\varepsilon > 0$ vor (z.B. $1/1000$) und suchen die $N(\varepsilon)$, so dass $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftarrow N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ (z.B. 1001). $n > N(\varepsilon) : \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$

Für $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ liegen alle weiteren (also ∞-viele) Glieder in der ε-Umgebung

(3) Cauchy: $\varepsilon > 0,\ n < m : |a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{mn}\right| < \left|\frac{m}{mn}\right|$

$= \frac{1}{n} < \varepsilon$ falls $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

Verknüpfungen von Folgen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\text{---}\ \ b_n = b$

Sind wieder konvergent

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

$\text{---}\ (a_n \cdot b_n) = ab$

$\text{---}\ (a_n - b_n) = a - b$

$\text{---}\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = a/b$

$(b_n \neq 0)$

(Unendliche) **Reihen** → "aufsummierte Folgen" → "Folgen von Teilsummen"

$$S_m = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Eine Reihe ist genau dann konvergent und hat den (Grenz-)Wert s, wenn die Folge ihrer Teilsummen S_m konv. (nicht etwa die ihrer Summanden a_n!)

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, d.h. Folge $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n = \lim_{m\to\infty} S_m = S < \infty$

Bsp 1: $S_m = \sum_{n=1}^{m} n = 1, 3, 6, 10, \ldots$ divergent! (siehe Übung)

→ wenn (a_n) divergiert, dann auch $(S_m) = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)$ ← ε-Umgebung

Bsp. 2: harmonische Reihe $S_m = \sum_{n=1}^{m} 1/n = 1, 3/2, 11/6, \ldots$ divergent!

$$S_n = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \ldots + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \tfrac{1}{2^m}\right) \quad \text{mit } n = 2^m$$

$$\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{m}{2}$$ → kann bel. groß werden ↯ Cauchy

Bsp 3: Reihe der inversen natürlichen Fakultäten $S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Konvergiert!

S_m ist monoton wachsend ✓

und beschränkt: $S_m = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{m!}$

(Majorante geometr. Reihe, s. Übung $q = \frac{1}{2}$) $< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}}$

$< \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ✓ ⇒ "Bolzano-Weierstraß"

(Nebenbei: der Grenzwert $1 + s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e < 3$

↑ Euler

Irrationale Eulersche Zahl 2,7182818…

nicht als Bruch zweier Natürlicher Zahlen darstellbar

Bsp. 4: Alternierend harmonisch $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$ Konvergiert! (s. unten)

$\cdots \oplus \ominus \oplus \ominus \bigcirc \bigcirc \ominus \oplus \ominus \cdots$

Gitterpotential als Bsp

Einige Konvergenzkriterien speziell für Reihen:

Leibniz-Kriterium (siehe): Eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (mit $a_n > 0$) konvergiert, wenn (a_n) eine monotone Nullfolge bildet.

Für den Spezialfall "absolut konvergenter" Reihen ($\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert):

Majoranten-Kriterium (siehe Bsp. 3): $|b_n| \leq |a_n|$ (für $n > n_0$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist absolut konv.

Quotienten-Kriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ (für $n > n_0$, $a_n \neq 0$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konv.

— " — $\geq q > 1$ — " — $\Rightarrow$ — " — divergent

Wurzel-K.: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q > 1$ (für $n > n_0$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konv.

$\geq q > 1$ $\Rightarrow$ divergent