Komplexe Zahlen

19.09.2007

Bisher: Körper der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (eigentlich ausreichend zur Beschreibung natürlicher Messgrößen)

Jetzt: Körper der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (Warum? $\rightarrow$ Hilfsmittel zur Berechnung)

Bisher: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ keine Lösung

Jetzt: $z^2 + 1 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm i \Leftrightarrow i^2 := -1$

Imaginäre Einheit ("erfunden" von Euler)

$\rightarrow$ Allgemein:
Jedes Polynom n-ten Grades $P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k = (z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$
hat genau n komplexe Nullstellen

Fundamentalsatz der Algebra!

Potenzen von i

$i := +\sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \mid i^3 = i^2 i = -i \mid i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \mid \ldots$

$$\begin{aligned} i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \\ i^{4n+4} &= 1 \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad n \in \mathbb{Z}$$

negative Potenzen: $i\, i^{-1} = 1 = i^4 = i\, i^3$

$\Rightarrow i^{-1} = i^3$

Allgemeine Def. der komplexen Zahlen:

$\underbrace{z := x + iy}_{\text{komplexe Zahl}} \quad \Big|\ x, y \in \mathbb{R}$

x Reelle Zahl
y Imaginäre Zahl

$\mathrm{Re}(z) = x$ Realteil von z $\quad \Big| \quad \mathrm{Im}(z) = y$ Imaginärteil von z $\rightarrow \in \mathbb{R}$

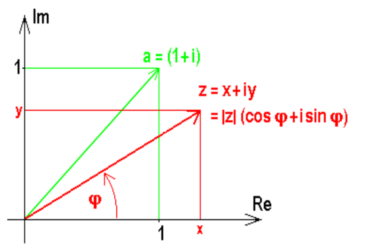
Eine komplexe Zahl ist "2-dimensional"
(2er-Tupel, Vektor in der Ebene, ...) $\Rightarrow$

$z = w$ Gl. in $\mathbb{C}$
$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$
$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$
zwei Gl. in $\mathbb{R}$

$\Downarrow \quad 1 := (1, 0) \quad i := (0, 1)$

Man trägt komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene auf:
Kartesisches Koordinatensystem:
oder ebene Polarkoordinaten

$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ mit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

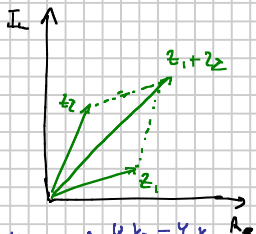


Auf dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$!

(Unterschied: komplexe Zahlen lassen sich nicht anordnen $\Rightarrow$ Es gibt kein ">" oder "<")

$z_1 := x_1 + iy_1 \mid z_2 := x_2 + iy_2$

Addition / Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$



Multiplikation: $z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$
$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{\underbrace{x_2 + iy_2}_{z_2}} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{\underbrace{(x_2 - iy_2)}_{z_2^*}} = \underbrace{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Re}} + i \underbrace{\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Im}}$

Konjugiert komplex

$z^* := \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z$
(i wird zu $(-i)$)

$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + \cancel{xy} - \cancel{iyx} - i^2y^2 = x^2 + y^2$ (kart.)

$= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ (polar)

$= |z|^2(\cos^2\varphi + \cancel{i\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{i\sin\varphi\cos\varphi} \underbrace{-i^2}_{+}\sin^2\varphi) = |z|^2$

→ Das Produkt einer Zahl mit ihrer konj. kompl. ergibt ihr Betragsquadrat (reell!)
(Betrag := Länge des Vektors in der Gaußschen Ebene)

Außerdem: $\frac{z+z^*}{2} = \mathrm{Re}\, z$, $\frac{z-z^*}{2} = \mathrm{Im}\, z$

($\mathrm{Im}\, z \neq 0$:) und $z^2 \neq |z|^2$
z.B.: $(i)^2 = -1$
$|i|^2 = i(-i) = 1$
aber: $|z^2| = |z|^2$

Die Eulerformel ("macht das Rechnen einfach")

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Beweis:

$f'(x) = \lambda f(x) \wedge f(0) = 1 \Longrightarrow f(x) = e^{\lambda x}$

- $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow f'(\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i f(\varphi)$
- $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 0$

$\Longrightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = i$ q.e.d.

Alternativ: Taylor-Reihen

$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n$ n gerade n ungerade $\left((-1)^k = i^{2k}\right)$

$\cos\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} (-1)^k \varphi^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} i^{2k} \varphi^{2k}$

$i\sin\varphi = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k \varphi^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} \varphi^{2k+1}$

Div. Implikationen:

k.k.: $(e^{i\varphi})^* = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^* = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$

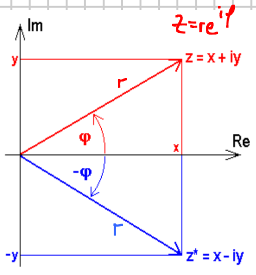
$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + n2\pi)}$ (2π periodisch)

Trigon. Fkt.

$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cosh i\varphi = \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}) = \cos\varphi$

$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = -i\sinh i\varphi = \mathrm{Im}(e^{-i\varphi}) = \sin\varphi$

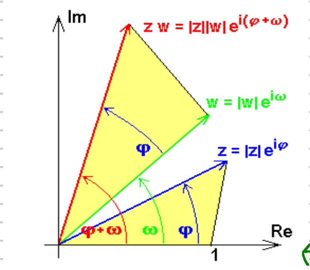
$z = x + iy = re^{i\varphi}$ mit $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ und $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$



Multiplikation komplexer Zahlen wird anschaulich:

↳ Addition der Winkel
Multiplikation der Beträge
→ "Dreh-Streckung"

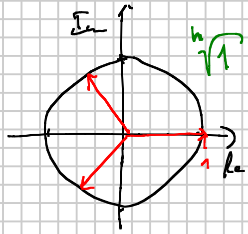
$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$



← (Bem.: Dreiecke sind kongruent!)

Wurzeln: Es gibt immer n verschiedene n-te Wurzeln:

$$\left(\sqrt[n]{r e^{i\varphi}}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} =: w e^{i\psi_k}$$



$\sqrt[n]{1}$ $\quad e^{i\varphi_{1,2,3}}$

$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$

$\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}\cdot 2$

$\Rightarrow$ $\underline{w = \sqrt[n]{r}}$,

wegen $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2\pi k)}$ $\quad 2\pi$-Periodizität:

$$n\cdot\psi \overset{!}{=} \varphi + 2\pi k$$

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} = \psi_k \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

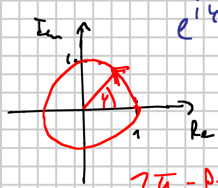
(Bem.: $\sum_{k=1}^{n} w_k = 0$)

Exponentialfkt.:

$(z = x + iy)$ $\quad w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = |w|\, e^{i\varphi_w}$

$\Rightarrow e^x$

$e^{iy} = e^{i(y+2\pi)}$



2π-periodisch

Potenzen:

(Formel von Moivre)

$$z^n = |z|^n (e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

$$= |z|^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

oder:

"Additionstheoreme der e-Fkt."

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

ausmultiplizieren & Re bzw. Im gleichsetzen

Trigonometrische Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Fazit: Trigonometrische Fktn. werden durch Euler-Formel viel leichter handhabbar

$e^{i\varphi}$ $\rightarrow$ "leicht abzuleiten $d/d\varphi$"

"leicht zu multiplizieren (→ Summe der Winkel)"

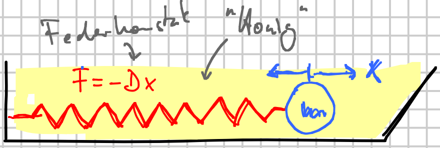
$\Rightarrow$ Komplexe Zahlen sind gut geeignet um physikalische Prozesse (vor allem "Schwingungen/Wellen") zu beschreiben

z.B. Mechanik, E.-Dynamik, Quantenmechanik ...

(wobei die eigentlichen Meßgrößen aber reell sind!)

Ein Beispiel aus der Physik:
(Und ein Ausblick auf Differentialgleichungen)

Das Federpendel:



"Kräftebilanz"
(Newtonsche Bew.-Gl.)

$$m \cdot \ddot{x} = -Dx - \Gamma \dot{x}$$

Rückstellkraft — viskose Reibung (proport. zu v)

$$\Longrightarrow m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + Dx = 0$$

$\Gamma/m = 2\gamma$ $\qquad \ddot{x} + \Gamma/m\, \dot{x} + D/m\, x = 0$

$D/m = \omega^2$ $\qquad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x$

Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

Lineare: ↳ nur $x, \dot{x}, \ddot{x}$ ($\cancel{x^2}$, $\cancel{\sin x}$, $\cancel{\dots}$)

homogene: ↳ keine andere Fktn. $f(t)$

Differentialgleichung: ↳ Funktion $x(t)$ und ihre Ableitungen kommen in ein und derselben Gl. vor

2. Ordnung: ↳ $x, \dot{x}, \ddot{x}$ bis zur 2. Ableitung

Lin. hom. DGl. 2. Ordn.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega^2\right) x = 0 \qquad (x = x(t))$$

→ $x=0$ → "langweilig"

↳ Klammer wird nur 0 für alle t, wenn x und die Ableitungen bis auf Vorkoeff. die gleiche Fkt. sind und die Summe der Koeffizienten 0 wird!

$\Longrightarrow$ e^{zt}

$$\dot{\left(e^{zt}\right)} = z e^{zt}$$

mit $\frac{d}{dx} \Rightarrow z \Rightarrow z^2 + z\,2\gamma + \omega^2 \overset{!}{=} 0$

a, b, c -Formel ($a = 1$) $\qquad z_{1,2} = -\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ $\qquad$ zwei Lösungen

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot e^{z_1 t} + B e^{z_2 t}$$

Linearkombination aus beiden Lösungen

A und B bestimmt durch Randbedingungen
(z.B. $x(t=0) = x_0$ Anfangsauslenkung)

Wir diskutieren 2 Grenzfälle:

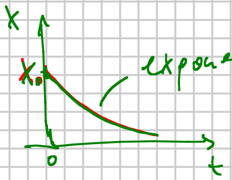
1) $\gamma \gg \omega$: "Der Dämpfungsterm dominiert" (→ Honig)

$$z_{1,2} \to -\gamma \mp \gamma \quad \Rightarrow z_1 = -2\gamma$$

($z_2 = 0$) → $x = \text{const.}$, $\dot{x} = 0$ nur in Ruhelage

$$x = A \cdot e^{-2\gamma t}$$
$$\dot{x} = -2A\gamma e^{-2\gamma t}$$
$$\ddot{x} = -4A\gamma^2 e^{-2\gamma t}$$

Randbedingung: z.B. $x(0) =: x_0 \to A = x_0$



exponentielles "Kriechen" hin zur Gleichgewichtslage
"überdämpfte Schwingung"
o. aperiodische —
o. Relaxation

2) $\omega \gg \gamma$ "Die Dämpfung ist vernachlässigbar" (Luft)

$\Rightarrow z_{1,2} \to \mp\sqrt{-\omega^2} = \mp i\omega$

Drehsinn in der Gauß'schen Ebene: physikalisch nicht relevant

Oszillation: $x = A e^{i\omega t}$

$\omega :=$ Kreisfrequenz

$= |A| e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$

Physikalisch: Realteil relevant

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + x^*}{2} = |A| \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitude, Phase

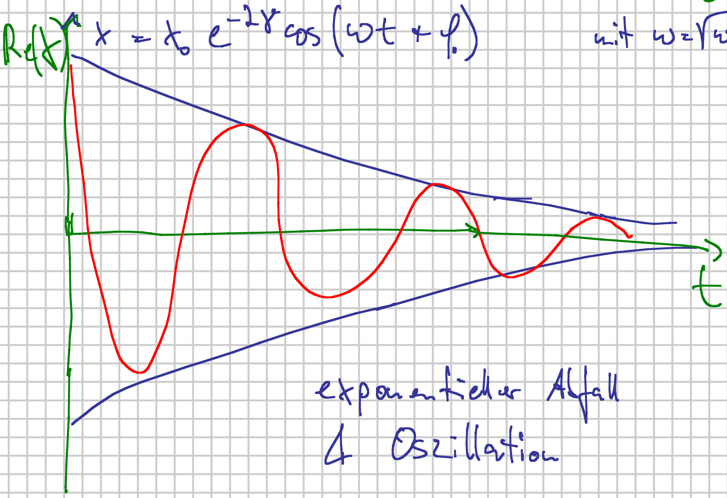
aus Rand- bzw. Anfangsbedingungen

"Ungedämpfte harmonische Schwingung"

z.B. $\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_0 = 0 \\ |A| = x_0 \end{array}$

3) "(Schwach) gedämpfte harmonische Schwingung":

$\mathrm{Re}(x)$: $x = x_0\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



exponentieller Abfall + Oszillation