

Differentialrechnung

Mathematik entwickelt durch
Theoretische Physik: \rightarrow Leibniz
 \rightarrow Newton

- Newton'schen Glt. d. Mechanik
- Maxwell'schen Glt. d. E-Dynamik
- Schrödinger Glt. d. Quantenmechanik

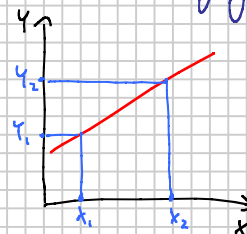
\rightarrow Differentialgleichungen!

Konzept der Ableitung:

Änderung von $y=f(x)$ mit $x \rightarrow$ Steigung

Differenzen-Quotient
(Steigungswieder):

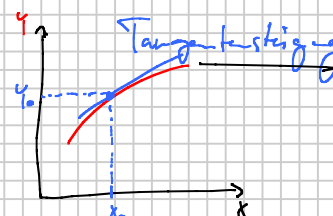
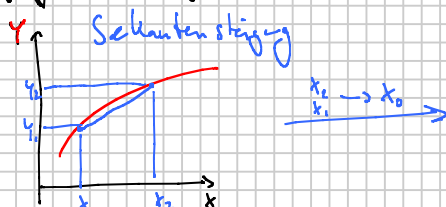
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



z.B. Bewegung: $s = s(t)$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v \quad \text{Geschwindigkeit}$$

Steigung einer beliebigen Fkt:



"Steigung zwischen zwei Punkten"

"Steigung am Punkt $(x_0 | y_0)$ "

\rightarrow Übergang vom "Differenzenquotient" zum "Differential (-quotient)"!

Ableitung:
Fkt. differenzierbar
in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (x-x_0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{oder} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \quad \text{für} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

$$\text{bzw.} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \quad \text{für} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$$

$\Rightarrow f'(x) \Leftrightarrow$
"differenzierbar"
 \Rightarrow "stetig"

Ander Schreibweise
(\rightarrow Physiker)

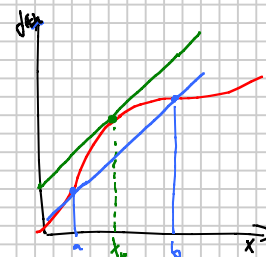
$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} = \left(\frac{d}{dx} \right) f(x) \Big|_{x_0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x_0}$$

\rightarrow "d" in infinitesimalen Quas

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Mittelwertsatz der
Differentialrechnung:

$f(x)$ stetig & diff.-bar in $[a, b]$
 $\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
"Es gibt einen Punkt im Zwischenintervall, dessen Ableitung gerade die Sekantensteigung ist."



Ableitung über
Limes der Sekantensteigung:

\rightarrow Differentialquotient

Bsp: Potenz-Fkt.

$$f(x) = x^n$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{1}{h} \left(x_0^n + n x_0^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots + x_0^n \right)$$

$$= n x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h + \dots + \frac{n-1}{1} x_0^{n-1} h^{n-1}$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

"Standard-Ableitungen"

$f(x)$	x^a	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$f'(x)$	$a x^{a-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
	e^x	a^x	$\ln x $	const.				$\arccot x$
	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	0				$-\frac{1}{1+x^2}$

Differentiationsregeln:

• Summenregel $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \rightarrow$ Linearität

• Produkt- & Quotientenregel:

Wenn f und g differenzierbar

$\Rightarrow f \cdot g$ und f/g ($g \neq 0$) differenzierbar

mit $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Bsp: $f(x) = x^2, g(x) = x^3$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$= 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$$

$$= 5x^4$$

$$(x^2 \cdot x^3)' = (x^5)' = 5x^4 \checkmark$$

• Kettenregel:

$u = h(x)$ und $g(u)$ differenzierbar

$\Rightarrow f(x) = g(h(x))$ — u —

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

"Äußere" "Innere"

Bsp: $y = f(x) = \sin^2 x$

$$= g(u) = u^2, u = h(x) = \sin x$$

$$g'(u) = 2u, h'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = g'(u) h'(x) = 2u \cos x$$

$$= 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Höhere Ableitungen: Ableitung der Ableitung der Ableitung...

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}; f^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) = \frac{1}{2!} f'''(x)$$

Bsp: Polynom n -ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n \Rightarrow f^{(n+1)} = 0$$

Physikalisches Bsp: $s = s(t) \rightarrow \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = v$ Geschwindigkeit

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s} \leftarrow \ddot{s}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = a$$
 Beschleunigung

"Kraft gleich Masse mal Beschleunigung"
(Newton'sche Bewegungsgleichung, Bewegungsgleichung der Mechanik)

Kritische Punkte und Extremwerte

$f'(x_0) = 0 \rightarrow$ "kritischer Punkt", d.h. die Tangentensteigung ist 0

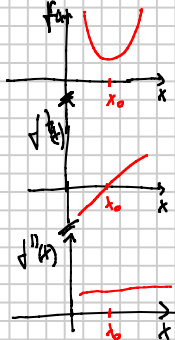
mehrere Möglichkeiten:

• Maximum oder Minimum (lokales)

Steigung bei x_0 ist 0

Vorzeichenwechsel $\rightarrow +$

\rightarrow Minimum

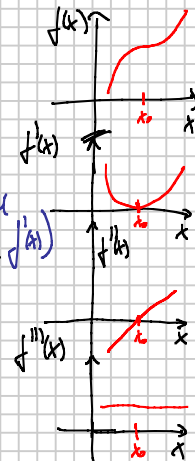


• Sattelpunkt

Steigung bei x_0 ist 0 dane

Vorzeichenwechsel \rightarrow Extremum in $f''(x)$

(siehe links)



• Wendepunkt



Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung \rightarrow Krümmung

$f''(x) > 0 \rightarrow$ Steigung wächst an \rightarrow "Linkskurve"

$f''(x) < 0 \rightarrow$ Steigung nimmt ab \rightarrow "Rechtskurve"

Wenn $f''(x) = 0$ \wedge $f''' \neq 0 \rightarrow$ Vorzeichenwechsel in der Krümmung, d.h. **Wendepunkt**
 (heißt auch: Extremum in der Steigung $f'(x)$!) (Bem: Sattelpunkte sind auch Wendepunkte!)

Grenzwerte von Brüchen:

Problem: z.B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$

Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} f(b) = g(b) = 0 \quad (b \text{ ist diff-bar}) \\ \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \quad (f'(b) \neq 0) \end{aligned}$$

\rightarrow Statt im Quotienten der Funktionen kann man im Quotienten der Ableitungen nachsehen!

Taylor-Entwicklung

Idee: Annäherung einer Fkt. $f(x)$ durch ein Polynom $P_n(x)$
 Vollständige "Nachbildung" von $f(x)$ durch unendliche Reihe $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

lineare Approximation: Entwicklung um x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

\rightarrow Annäherung durch Tangente



quadratisch: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

(Wenn es ein optimales Polynom $p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$ gibt, dann ist $p_2'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) \rightarrow a_1 = p_2'(x_0)$ und $p_2''(x) = 2a_2 \rightarrow a_2 = p_2''(x_0)/2$)

allgemein: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ **Taylor-Reihe**

$$f(x) = \sum_{n=0}^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \mathcal{O}\left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}\right)$$

Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n

\rightarrow Restglied enthält mindestens Term der Ordnung $(x-x_0)^{n+1} \rightarrow$ "Fehler" durch Restglied mit

genauer:

$$f(x) - P_n(x) =: r_n(x) \leq \max \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \quad (0 < \theta < 1)$$

erzeugt Punkt zwischen x_0 und x

Abschätzung: "ungünstigster Beitrag des ersten weggelassenen Gliedes zwischen x_0 und x "

Nicht jede Taylor-Entwicklung muss konvergieren!

Aber: Nach Quotientenkriterium (s. Reihe) konvergiert falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \cdot (n+1)!}{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \cdot n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} (n+1) \right| < 1$$

oder: $|x-x_0| < R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} (n+1) \right|$

Konvergenzradius R

Bsp: $f(x) = \sin(x)$ → Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

⋮

$$\rightarrow f(x) = 0 + 1 \cdot x - 0 \cdot x^2 - 0 \cdot x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$$

Konvergenz? Quotient aufeinander folgen

$$\text{Glieder: } \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{2k+3}{x^2} \right|$$

$$\left| \frac{2k+3}{x^2} \right| < \lim_{k \rightarrow \infty} |2k+3| \rightarrow \infty$$

∞ konvergiert für alle x

Fehler: $\sin x - p_n(x) \leq \max_{t \in [-x, x]} |p_{n+1}(t)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$n=4 \mid x=0,1 \mid |p_5| < \frac{1 \cdot 10^{-5}}{120} < 10^{-7}$$

$$x=2 \mid |p_5| < \frac{32}{120} = 0,26$$

← Vorsicht!
immer in der Nähe
des gesuchten Bereichs
entscheiden, sonst kann Fehler
groß werden!