Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD Dr. Rochus Klesse
Moritz Ernst, Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 12

WS 2011/12

Abgabe: Dienstag, den 17.01.2012 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt.
Sie dürfen in **Dreiergruppen** abgeben.
Besprechung: Donnerstag, den 19.01.2012 in den Übungsstunden.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/ktpii2011.html

Ankündigung: Gruppe 7 (Max Schaefer) findet am 19.01. in **Hörsaal II** statt.

49. Lagrangefunktionen *(4 Punkte)*

Geben Sie zu folgenden Systemen, die sich in einem homogenen Gravitationsfeld mit Schwerebeschleunigung $-g\mathbf{e_z}$ befinden, die Lagrangefunktion an:

a) ein Doppelpendel in der $x-z-$Ebene mit Längen $l_1,\ l_2$ und Massen $m_1,\ m_2$,

b) ein Stab der Länge l in der $x-z-$Ebene, an dessen Enden sich Massen $m_1,\ m_2$ befinden, wobei die Bewegung von m_1 auf die x-Achse eingeschränkt ist,

c) ein einfaches Pendel der Länge l und Masse m in der $x-z-$Ebene, dessen Aufhängungspunkt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius r in der $x-z-$Ebene bewegt,

d) einen Massenpunkt mit Masse m, der sich in einem Kreiskegel mit Öffnungswinkel 2α und der $z-$Achse als Symmetrieachse bewegt,

e) zwei identische, durch eine Feder der Stärke k gekoppelte Pendel der Länge l und Masse m.

Tipp: Es ist nicht verboten, im Hinblick auf die Klausur auch die Euler-Lagrange-Gleichungen auszurechnen und sich an einer (evtl. approximativen) Lösung zu versuchen!

50. Lineare Kette *(4 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende *eindimensionale* System: drei Massenpunkte der Masse m seien durch Federn der Stärke k untereinander verbunden. Die beiden äußeren Massenpunkte seien zudem durch Federn der gleichen Stärke mit festen Wänden verbunden.

a) Verwenden Sie die Auslenkungen aus der Ruhelage als generalisierte Koordinaten und geben Sie die Lagrangefunktion des Systems an.

b) Die kinetische und potentielle Energie des Systems, die in die Lagrangefunktion eingehen, sind Bilinearformen. Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch, um die Eigenfrequenzen und Normalmoden des Systems zu bestimmen und skizzieren Sie die Normalmoden.

c) Was ändert sich für offene Randbedingungen, d.h. für drei Massenpunkte, die nur untereinander gekoppelt sind?

Bemerkung: Die Normalmoden ξ_i heißen so, weil in dieser Basis die kinetische Energie gerade die Form $\sum_i \xi_i^2$ annimmt, d.h. bzgl. der Bilinearform T sind die ξ_i tätsachlich orthonormal.

51. Perle auf rotierendem Draht *(4 Punkte)*

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der in Zylinderkoordinaten von der Gleichung $z = ar^2$ beschrieben wird und sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m. Die Schwerkraft wirkt in negative z-Richtung.

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten

$$L = \frac{m}{2}(1 + 4a^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{m}{2}(\omega^2 - 2ag)r^2$$

lautet. Was fällt auf, wenn $\omega^2 = 2ag$?

b) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung. **Hinweis**: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{r}$ und verwenden Sie, dass das, was Sie erhalten, einer totalen Zeitableitung entspricht. Das am Ende auftretende Integral kann nicht mit elementaren Funktionen gelöst werden und muss nicht berechnet werden.

52. Lagrangefunktion für geladene Teilchen *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie durch explizite Berechnung der Bewegungsgleichungen, dass die Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - e\phi(\mathbf{q}, t) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{t})$$

die Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld zu den Potentialen ϕ, $\mathbf{A}$ beschreibt.

b) Zeigen Sie, dass L eichinvariant ist.