Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD Dr. Rochus Klesse
Moritz Ernst, Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik II

Notiz zur Variationsrechnung

WS 2011/12

Es soll kurz die Beziehung zwischen der Ihnen bekannten Ableitung mehrdimensionaler Funktionen und der Variationsableitung erläutert werden. Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, die man sich für $n = 2$ als "Funktionsberg" über der xy-Ebene mit Höhe $f(x, y)$ über dem Punkt $(x|y)$ vorstellen kann. $\mathbb{E}^n$ bezeichnet den n-dimensionalen euklidischen Punktraum, den "Anschauungsraum", der über einen ausgezeichneten Ursprung verfügt und dessen Differenzvektorraum der $\mathbb{R}^n$ ist. Das Differential $d_P f$ der Funktion f im Punkt P stellt die in diesem Punkt beste lineare Approximation dar. Bewegt man sich von einem gegebenen Punkt P durch Addition eines Vektors v aus dem Differenzvektorraum zu einem Punkt $Q = P + v$, so ändert sich der Funktionswert in linearer Näherung um[1]

$$d_P f(v) = \frac{d}{d\epsilon} f(P + \epsilon v)|_{\epsilon=0}.$$

Dasselbe Konzept wird für die Variationsrechnung verwendet. Hier wird lediglich der Anschauungsraum $\mathbb{E}^n$ durch einen Funktionsraum[2] mit geeigneter Norm ersetzt, etwa

$$V = \{\gamma : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \gamma \in C^2([a, b]),\ \gamma(a) = y_0,\ \gamma(b) = y_1\},$$

die Menge aller zweifach differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, deren Werte am Rand festgehalten werden. Der Differenzvektorraum ist

$$V' = \{\gamma : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \gamma \in C^2([a, b]),\ \gamma(a) = \gamma(b) = 0\},$$

denn die Differenz zweier Funktionen aus V ist weiterhin zweifach differenzierbar, verschwindet jedoch am Rand.
Eine aus technischen Gründen äußerst relevante Klasse von reellwertigen Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$, d.h. von sog. **Funktionalen**, hat die Form

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto f(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t), t)dt,$$

mit einer differenzierbaren Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\xi, \eta, \tau) \mapsto L(\xi, \eta, \tau)$. Als Beispiele seien etwa die Länge einer Kurve und das Wirkungsfunktional der Physik (mit Lagrangefunktion L) genannt. Beim Differenzieren ist wie gewohnt zu verfahren. Man untersucht, wie sich das Funktional in linearer Approximation verhält, wenn man sich von einer Funktion (einem Punkt)

[1] Wählt man z.B. kartesische Koordinaten $\{x^i\}$, so ergibt sich weiter $d_P f(v) = \frac{d}{d\epsilon} f(P + tv)|_{\epsilon=0} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P\ dx^i(v)$, d.h. die übliche Gestalt $d_P f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_P\ dx^i$.

[2] Dessen Punkte konsequenterweise Funktionen sind!

$\gamma \in V$ nach $\gamma + \phi$ bewegt, wobei $\phi \in V'$:

$$\begin{aligned}
d_\gamma f(\phi) &= \frac{d}{d\epsilon} f(\gamma + \epsilon\phi)|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b L(\gamma(t) + \epsilon\phi(t), \gamma'(t) + \epsilon\phi'(t), t) dt|_{\epsilon=0} \\
&= \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial \xi}|_{(\xi,\eta,\tau)=(\gamma(t),\gamma'(t),t)} \frac{d}{d\epsilon}(\gamma(t) + \epsilon\phi(t))|_{\epsilon=0} \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} \frac{d}{d\epsilon}(\gamma'(t) + \epsilon\phi'(t))|_{\epsilon=0}] dt \\
&= \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial \xi}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} \phi(t) + \frac{\partial L}{\partial \eta}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} \phi'(t)] dt \\
&\underbrace{=}_{\text{partielle Integration}} \int_a^b \phi(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \xi}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \eta}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} \right) dt.
\end{aligned}$$

Eine der Grundaufgaben der angewandten Differentialrechnung ist es, Extrema von Funktionen zu bestimmen. Wie Sie wissen, werden dazu zunächst die kritischen Punkte berechnet, d.h. diejenigen Punkte, an denen das Differential verschwindet. Da die Funktionen ϕ aus dem Differenzvektorraum insbesondere stetig sind, besagt das Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass das soeben berechnete Differential nur genau dann für jede beliebige Variation ϕ verschwindet, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \eta}|_{(\gamma(t),\gamma'(t),t)} = 0$$

gilt. Dieses ist die berühmte Euler-Lagrange-Gleichung.
Hinweis: in der physikalischen Literatur findet man praktisch durchweg die Notation

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \gamma'} = 0.$$

Diese ist aufgrund ihrer Kürze in der Praxis überlegen, verwirrt den Anfänger jedoch manchmal. Es wird hier selbstverständlich **nicht** "nach Funktionen und ihren Ableitungen abgeleitet", sondern die Funktion L wird wie gewohnt differenziert und erst **anschließend** wird die Kurve und ihre Ableitung eingesetzt.
Einen kurzen, aber mathematisch sauberen Überblick über Variationsrechnung und Funktionalableitung finden Sie z.B. im Buch "Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik" von S. Großmann.