Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 8

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmeth2014.html/*

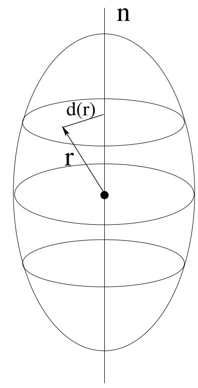
Abgabe bis Dienstag, den 03.06.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

30. Trägheitsmomente

2+2+2+2+2+3=13 Punkte

Das Trägheitsmoment I_n eines Körpers K bzgl. einer Symmetrieachse n des Körpers ist durch das Volumenintegral

$$I_n = \int_K \rho(\underline{r})\,(d(\underline{r}))^2 \,\mathrm{d}^3\underline{r}$$



gegeben. Hierbei ist $\rho(\underline{r})$ die Dichte und $\mathrm{d}(\underline{r})$ der Abstand zur Symmetrieachse des Körpers (vgl. Skizze). Im folgenden gehen wir immer von einer homogenen Dichte aus, d.h. $\rho(\underline{r})$ ist konstant. Die Gesamtmasse der betrachteten Körper sei jeweils M. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment

a) eines Zylinders der Höhe H mit Radius R bzgl. der Zylinderachse,

b) einer Kreisscheibe vom Radius R bzgl. einer Mittelpunktsachse senkrecht zur Scheibe,

c) einer Kreisscheibe vom Radius R bzgl. einer Mittelpunktsachse parallel zur Scheibe,

d) einer Kugel vom Radius R bzgl. einer Mittelpunktsachse,

e) eines Würfels mit Kantenlänge a bzgl. einer Symmetriesachse des Würfels,

f) eines Kreiskegels mit Radius R und Höhe H bzgl. der Symmetrieachse des Kegels.

31. Konservative Vektorfelder

2+5=7 Punkte

a) Was ist ein konservatives Vektorfeld und welche Eigenschaften besitzt es?

b) Geben Sie für folgende Vektorfelder ein Potential an, falls es sich Ihrer Meinung nach um ein konservatives Vektorfeld handelt. Andernfalls zeigen Sie mittels Wegintegration über einen geeignet gewählten Weg, dass das Vektorfeld nicht konservativ ist.

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}, \quad \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\alpha}{|\underline{r}|^2}\,\hat{\underline{r}}, \quad \underline{A}(\underline{r}) = \underline{a}, \quad \underline{A}(\underline{r}) = (\underline{a}\cdot\underline{r})\,\underline{r}.$$

$\alpha \in \mathbf{R}$ und $\underline{a} \in \mathbf{R}^3$ seien konstant und $\hat{\underline{r}}$ bezeichne den Einheitsvektor in $\underline{r}$-Richtung.

32. Potential eines isotropen Zentralfeldes

4 Punkte

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r}) = f(|\underline{r}|)\,\hat{\underline{r}}$ das Potential $U(\underline{r}) = -F(|\underline{r}|)$ besitzt.

33. Arbeit? *6 Punkte*

Im Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r}) = -\alpha\hat{\underline{r}}/|\underline{r}|^3$ werde ein Teilchen entlang des Wegs

$$\gamma \,:\, \varphi \mapsto \begin{pmatrix} x_0 - R + R\cos\varphi \\ y_0 + R\sin\varphi \\ H\varphi \,/\, 8\pi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 8\pi],$$

bewegt. Welche Arbeit $-\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{\mathrm{d}l}$ muss dafür aufgebracht werden?

34. Gradient, Divergenz, Rotation *2+2+2+2+2=10 Punkte*

Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\underline{r}) \equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) \equiv 0, \quad \operatorname{div}(f(\underline{r})\underline{A}(\underline{r})) \equiv (\operatorname{grad} f(\underline{r})) \cdot \underline{A}(\underline{r}) + f(\underline{r}) \operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}),$$

$$\operatorname{rot}(f(\underline{r})\underline{A}(\underline{r})) \equiv f(\underline{r})\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) + (\operatorname{grad} f(\underline{r})) \times \underline{A}(\underline{r}),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{A}(\underline{r}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r}) \equiv \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial z^2}.$$