Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 10

Wintersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 16.12.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

34. Dynamik *6+5=11 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter der Wirkung des Kraftfelds $\underline{F}(x,y) = -\begin{pmatrix} kx \\ 4ky \end{pmatrix}$, wobei $k > 0$.

a) Zur Zeit $t_0 = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $\underline{r}_0 = a\underline{e}_1$ und bewege sich mit Geschwindigkeit $\underline{v}_0 = b\underline{e}_2$. Welche Bahn $\underline{r}(t)$ nimmt das Teilchen? Skizzieren Sie die Bahnkurve für eine sinnvolle Wahl der Parameter k, m, a und b. Sind Impuls und Drehimpuls des Teilchens erhalten?

b) Nun sei bekannt, dass das Teilchen zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort $\underline{r}_0 = a\underline{e}_1$ und zur Zeit $t_1 = \pi/(2\omega)$, wobei $\omega = \sqrt{k/m}$, am Ort $\underline{r}_1 = \underline{0}$ gewesen ist. Auf welcher Bahn $\underline{r}(t)$ hat es sich von $\underline{r}_0 = a\underline{e}_1$ nach $\underline{r}_1 = \underline{0}$ bewegt?

35. Partielle Ableitung *2+2+2+2+2=10 Punkte*

Bilden Sie für folgende Funktionen alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und überprüfen Sie jeweils, ob der Satz von Schwarz gilt:

a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

b) $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

c) $h(x,y,z) = \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z)$

d) $i(x,y,z) = -(y \ln x + z \ln y - x \ln z)$.

e) $j(\underline{r}) = \frac{1}{(a+\underline{b}\cdot\underline{r})^3}$

36. Gradient *5+5=10 Punkte*

a) Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

$$f(\underline{r}) = \underline{a}\cdot\underline{r}\,, \quad g(\underline{r}) = \frac{1}{(\underline{a}\cdot\underline{r})^2}\,, \quad h(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}\,, \quad i(\underline{r}) = \frac{1}{2}k|\underline{r}|^2\,.$$

Hierbei ist $\underline{a}$ ein konstanter Vektor und k eine positive Konstante.

b) Skizzieren Sie für die unter **a)** angegebenen Funktionen jeweils die Niveaufläche und das Gradientenfeld.

37. Wegintegrale

1+3+3+2=9 Punkte

Wir wollen nun für das Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r}) = -k\underline{r}$ das Wegintegral berechnen.

a) Parametrisieren Sie hierzu zunächst den Weg γ_1, der auf direktem Weg (also geradeaus) vom Ursprung $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$ führt.

b) Berechnen Sie nun das Wegintegral von $\underline{F}(\underline{r})$ entlang γ_1.

c) Wiederholen Sie Aufgabenteile **a)** und **b)** für den Weg γ_2, der von $(0, 0, 0)$ zunächst geradeaus zu $(1, 0, 0)$ führt, von dort geradeaus zu $(1, 1, 0)$ und schließlich von dort ebenfalls bei $(1, 1, 1)$ endet.

d) Was fällt Ihnen beim Vergleich der beiden Wegintegrale auf? Wofür kann dies ein Indiz sein?