
Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 13

Wintersemester 2014

Webpage: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/>

Abgabe bis Dienstag, den 20.01.2015, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

42. Körper im Zentralkraftfeld

2+2+3+3=10 Punkte

Gegeben sei das Zentralkraftfeld

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\beta}{r^4} \hat{r}.$$

- Bestimmen Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ für ein Teilchen der Masse m mit Drehimpulsbetrag $l := |\underline{L}|$ im Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$.
- Bestimmen Sie die Stelle r_0 und den Wert $U_{\text{eff}}(r_0)$ des Maximums von $U_{\text{eff}}(r)$.
- Diskutieren Sie qualitativ die verschiedenen Typen von Bahnkurven (insbesondere diejenige mit $E = U_{\text{eff}}(r_0)$), die in diesem Potential möglich sind.
- Nun seien $m = 1 \text{ kg}$, $\beta = 1 \text{ Nm}^4$, $\underline{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \text{ m} \\ 2 \text{ m} \\ 3 \text{ m} \end{pmatrix}$ und $\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \text{ m s}^{-1} \\ -8 \text{ m s}^{-1} \\ 0 \text{ m s}^{-1} \end{pmatrix}$ zur Zeit $t = 0$ gegeben. Fällt das Teilchen unter diesen Anfangsbedingungen in das Kraftzentrum oder entweicht es ins Unendliche?

43. Träge und schwere Masse

2+2+2+2+2=10 Punkte

- Was ist die träge Masse eines Körpers und wie kann man sie experimentell bestimmen?
- Was ist die schwere Masse eines Körpers und Wie kann man sie experimentell bestimmen?
- Warum sollte man diese beiden "Arten" von Masse *a priori* unterscheiden?
- Was versteht man unter der *Äquivalenz von träger Masse und schwerer Masse*? Wie kann man sie experimentell demonstrieren?
- Warum fallen im Vakuum alle Körper mit derselben Beschleunigung?

44. Flächensatz

10 Punkte

Formulieren Sie den Flächensatz und beweisen Sie ihn.

45. Eine außergewöhnliche Erhaltungsgröße

4+2+4=10 Punkte

Wir betrachten wieder das Zentralpotential

$$U(\underline{r}) = -\frac{\beta}{r},$$

das eines der wichtigsten Potentiale der Physik ist.

- Berechnen Sie das zugehörige Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ und zeigen Sie, dass der Drehimpuls \underline{L} eines Teilchens der Masse m in diesem Kraftfeld erhalten ist, dass also gilt: $\dot{\underline{L}} \equiv 0$.
- Leiten Sie $\underline{r} \cdot \underline{r} = r^2$ nach der Zeit ab, um zu zeigen, dass $\underline{r} \cdot \dot{\underline{r}} = r\dot{r}$ gilt.
- Gegeben sei nun

$$\underline{A} := \dot{\underline{r}} \times \underline{L} - \frac{\beta}{r}\underline{r}.$$

Zeigen Sie, dass \underline{A} eine Erhaltungsgröße ist, dass also $\dot{\underline{A}} \equiv 0$ gilt. Benutzen Sie hierzu die Bewegungsgleichung $\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{F}(\underline{r})$, die Resultate der ersten beiden Aufgabenteile und die häufig benötigte Vektoridentität $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \equiv \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$. [Anmerkung: Die Erhaltungsgröße \underline{A} erlaubt eine einfache Herleitung der Bahnkurven im Zentralpotential $U(\underline{r})$. Weiteres dazu auf dem nächsten Blatt.]