Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Jochen Peschutter

Mathematische Methoden – Blatt 3

Sommersemester 2014

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 28.10.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

8. Vektoren und Basisdarstellung

2+4+4=10 Punkte

Gegeben seien die Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$ mit Komponenten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 bezüglich einer Orthonormalbasis (ONB) $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

a) Stellen Sie $\underline{u}$ als Linearkombination von $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ und $\underline{e}_3$ dar.

b) Zeigen Sie, dass $\underline{u} \cdot \underline{v} \equiv \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$ gilt.

c) Zeigen Sie auch, dass $|\underline{u}| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2}$ gilt.

9. ONB

4+6=10 Punkte

Gegeben sei eine ONB $\mathcal{B} := (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ und außerdem die Vektoren $\underline{f}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$, $\underline{f}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ und $\underline{f}_3 := \underline{e}_3$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathcal{B}' := (\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3)$ ebenfalls um eine ONB handelt.

b) Berechnen Sie für die beiden nebenstehenden Vektoren die Darstellung in $\mathcal{B}'$ (Tip: Skalarprodukt).

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

10. Satz des Thales

2+6=8 Punkte

a) Wie lautet der Satz des Thales?

b) Beweisen Sie den Satz des Thales mithilfe des Skalarprodukts.

11. Bahnkurven

4+4+4=12 Punkte

Bezüglich einer ONB $\mathcal{B} := (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ seien zwei Bahnkurven

$$\underline{r}_1(t) = R\cos(\omega t)\underline{e}_1 + R\sin(2\omega t)\underline{e}_2$$

und

$$\underline{r}_2(t) = vt\sin(\omega t)\underline{e}_1 + vt\cos(\omega t)\underline{e}_2 + vt\underline{e}_3$$

gegeben. Hierbei sind R, ω und v konstante Parameter und $t \in \mathbf{R}$ der Zeitparameter.

a) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven. Zeichnen Sie für die zweite Bahn zunächst die Projektion auf die $\underline{e}_1$-$\underline{e}_2$-Ebene, skizzieren Sie dann grob die Bewegung in drei Dimensionen.

b) Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit $\underline{v}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \underline{x}(t)$ und die Beschleunigung $\underline{a}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \underline{v}(t)$ für beide Bahnkurven.

c) Zeichnen Sie jeweils für zwei Zeitpunkte t den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor ein.