
Mathematische Methoden – Lehramt GymGe/BK – Blatt 9

Wintersemester 2014

Webpage: <http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mathmethLA2014.html/>

Abgabe bis Dienstag, den 09.12.2014, 12:00 in den entsprechenden Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

30. Harmonischer Oszillator in einer Dimension

3+7=10 Punkte

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse m , das sich nur auf der x -Achse bewegen kann und der Rückstellkraft $F(x) = -kx$ ausgesetzt ist (k ist ein reeller, positiver Parameter). Dementsprechend wird die Dynamik des Systems durch folgende DGL beschrieben:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

die DGL zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ löst.

b) Skizzieren Sie die Lösung für $x_0 = 0$ und $v_0 = -\omega$. Wie groß ist die maximale Auslenkung $x_{\max}$ des Teilchens aus der Ruhelage bei $x = 0$ und wie groß ist die Periodendauer T der Schwingung? Wie verändert sich die Periodendauer, wenn man die Masse m vervierfacht bzw. k vervierfacht?

31. Harmonischer Oszillator in drei Dimension

2+3+3+4+3=15 Punkte

Nun betrachten wir den dreidimensionalen Harmonischen Oszillator. Hierbei handelt es sich um ein Punktteilchen der Masse m , das sich im dreidimensionalen Raum bewegen kann und der Rückstellkraft $\underline{F}(\underline{r}) = -k\underline{r}$ ausgesetzt ist (k ist wieder ein reeller, positiver Parameter). Dementsprechend wird die Dynamik des Systems durch folgende DGL beschrieben:

$$m\ddot{\underline{r}} = -k\underline{r}.$$

a) Skizzieren Sie das Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\underline{v}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

die DGL zu den Anfangsbedingungen $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ und $\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}_0$ löst.

c) Skizzieren Sie die Bahnkurven für folgende Kombinationen von Anfangswerten ($a \in \mathbf{R}$):

1. $\underline{r}_0 = ae_1$ und $\underline{v}_0 = \underline{0}$,
2. $\underline{r}_0 = ae_1$ und $\underline{v}_0 = a\omega e_2$,
3. $\underline{r}_0 = ae_1$ und $\underline{v}_0 = 2a\omega e_2$.

d) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls des Teilchens erhalten ist. Berechnen Sie außerdem die Drehimpulse für die drei Bahnkurven aus c).

e) Zur Zeit $t_1 = \pi/(4\omega)$ sei nun $\underline{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{v}(t_1) = \underline{0}$. Wo befand sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ und wo wird es für $t_2 = 1001\pi/\omega$ sein?

32. Drehimpulserhaltung

1+4+3=8 Punkte

Ein Teilchen bewege sich reibungsfrei auf einer Ebene. Nun bohren wir ein kleines Loch in die Ebene und führen von unten durch das Loch einen dünnen Faden, an dem wir dann das Teilchen befestigen, das sich nun nur noch am gespannten Faden über die Ebene bewegen kann. Der Abstand des Teilchens vom Loch kann nun reguliert werden, indem man mit geeigneter Kraft an dem Faden zieht.

- a) Skizzieren Sie die Konstruktion.
- b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls (z.B. in Bezug auf den Ort des Lochs in der Ebene) des Teilchens konstant ist – unabhängig davon, wie man die Länge des Fadens verändert.
- c) Für $t \leq 0$ bewege sich das Teilchen nun gleichförmig-kreisförmig am Faden der Länge R_0 mit der Kreisfrequenz ω_0 um das Loch. Für $t \geq t_1$ (> 0) Sei die Länge des Fadens nun auf ein Viertel verkürzt, d.h. $R_1 = R_0/4$. Wie groß ist nun die Kreisfrequenz ω_1 ?

33. Schwerpunkt

4+3=7 Punkte

Gegeben seien vier Teilchen der Massen $m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = m$ an den jeweiligen Orten $\underline{r}_0 = \underline{0}$, $\underline{r}_1 = e_1$, $\underline{r}_2 = e_2$ und $\underline{r}_3 = e_3$.

- a) Berechnen Sie den Schwerpunkt. Skizzieren Sie die Anordnung inklusive des Schwerpunkts.
- b) Nun sei m_0 nicht gleich m sondern $m_0 = 100m$, bzw. $m_0 = m/100$. Berechnen Sie auch für diese beiden Fälle den Schwerpunkt des Gesamtsystems und skizzieren Sie die Anordnung.